Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

SS 2011

Übungen zu Analysis I

Blatt 2 - Abgabe bis 21.4.2011

6. Es seien M und N Mengen und $p : M \times N \to M$ sowie $q : M \times N \to N$ die durch $p(x, y) = x$ und $q(x, y) = y$ gegebenen Abbildungen. Zeigen Sie, dass es für beliebige Mengen L und Abbildungen $f : L \to M$ und $g : L \to N$ genau eine Abbildung $h : L \to M \times N$ gibt, so dass $f = p \circ h$ und $g = q \circ h$.

7. Es sei $f : M \to N$ und $g : L \to M$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

   (a) Ist $f \circ g$ surjektiv, so ist f surjektiv.

   (b) Ist $f \circ g$ injektiv und g surjektiv, so ist f injektiv.

8. Eine Teilmenge I eines angeordneten Körpers K heißt Intervall, wenn für alle Elemente x, y, z von K gilt

$$x \in I \ \wedge \ z \in I \ \wedge \ x \leq y \leq z \quad \Rightarrow \quad y \in I.$$

   Zeigen Sie, dass für beliebige Intervalle I und J in K gilt:

   (a) $I \cap J$ ist ein Intervall.

   (b) Ist $I \cap J \neq \varnothing$, so ist $I \cup J$ ein Intervall.

9. Beweisen Sie: Für alle Elemente x, y eines angeordneten Körpers mit der Eigenschaft $0 < x \leq y$ gilt

$$x^2 \leq \left(\frac{2xy}{x+y}\right)^2 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq y^2,$$

   und tritt hier irgendwo Gleichheit ein, so ist $x = y$.

10.* Beweisen Sie, dass für beliebige Mengen K, L und M folgende Gleichmächtigkeiten gelten:

$$(M \times N)^L \sim M^L \times N^L, \qquad N^{L \times M} \sim (N^L)^M,$$
$$L \cap M = \varnothing \quad \Rightarrow \quad N^{L \cup M} \sim N^L \times N^M.$$