Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2011

Übungen zu Analysis I

Blatt 3 - Abgabe bis 28.4.2011

11. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n und alle Elemente x eines angeordneten Körpers mit der Eigenschaft $x > -1$ gilt
$$(1+x)^{-n} \geq 1 - nx.$$

12. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt
$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$
Hinweis: Es empfiehlt sich, den Schritt von $n-1$ nach n zu tun und die Bernoulli-Ungleichung anzuwenden.

13. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen über eine Folge rationaler Zahlen x_n, ob sie äquivalent zur Aussage $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist. Dabei bezeichnen n und n_0 immer natürliche Zahlen und ε eine rationale Zahl. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

    (a) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle n mit der Eigenschaft $n \geq 2n_0$ gilt $|x_n| \leq 2\varepsilon$.

    (b) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n, so dass $|x_n| < \varepsilon$.

    (c) Es gibt ein n_0, so dass für alle $\varepsilon > 0$ und alle n mit der Eigenschaft $n \geq n_0$ gilt $|x_n| < \varepsilon$.

    (d) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele n, so dass $|x_n| < \varepsilon$.

    (e) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele n, so dass $|x_n| \geq \varepsilon$.

14. Es sei x_n eine konvergente Folge, die nur endlich viele Werte annimmt. Zeigen Sie, dass die Folge von einem gewissen Index an konstant ist.

15.* Es sei p eine Primzahl. Wir definieren für jede rationale Zahl x eine rationale Zahl $|x|_p$ wie folgt:
$$|0|_p = 0, \qquad \left|\frac{a}{b}\cdot p^n\right|_p = p^{-n},$$

falls a, b und n ganze Zahlen sind, wobei a und b nicht durch p teilbar sind. Zeigen Sie, dass damit ein Absolutbetrag auf dem Körper $\mathbb{Q}$ definiert ist, und dass für alle rationalen Zahlen x, y gilt

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).$$