Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2011

Übungen zu Analysis I

Blatt 4 - Abgabe bis 5.5.2011

16. Zeigen Sie, dass die Folge

$$x_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 2}$$

konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert a.
Finden Sie für eine beliebige rationale Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \varepsilon$.

17. Bestimmen Sie die Grenzwerte dieser Folgen:

$$a_n = \frac{n^2+2}{n-1} - \frac{n^2+3}{n+1}, \qquad b_n = \frac{3^{n+1} + 5n^4}{3^{n-1} + 4n^5}, \qquad c_n = \frac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n}{3^n + 2^n}.$$

18. Zeigen Sie, dass diese Folgen gegen 0 konvergieren:

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad b_n = \frac{4^n}{2^{2^n}}, \qquad c_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

19. Für jede rationale Zahl x sei

$$a_n(x) = \left(\frac{5x-1}{x^2+5}\right)^n.$$

Man bestimme explizit die Mengen

$$M = \{x \in \mathbb{Q} \mid \text{die Folge der } a_n(x) \text{ ist beschränkt}\},$$
$$N = \{x \in \mathbb{Q} \mid \text{die Folge der } a_n(x) \text{ ist konvergent}\}.$$

20.* Es seien a und b rationale Zahlen. Wir definieren rekursiv

$$x_0 = a, \qquad x_1 = b, \qquad x_{n+2} = \frac{2x_{n+1} + x_n}{3}.$$

Beweisen Sie, dass die Folge der x_n konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.