Universität Bielefeld SS 2011
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu Analysis I

Blatt 5 - Abgabe bis 12.5.2011

21. Stellen Sie fest, ob diese Folgen konvergent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:
$$a_n = n\big(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\big), \qquad b_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

22. Finden Sie Maximum, Minimum, Supremum und Infimum (soweit sie existieren) von folgenden Mengen in $\mathbb{R}$:
$$M = \{x \mid x = \tfrac{n^2+n}{n^2+1} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}\},$$
$$N = \{x \mid x = (-\tfrac{1}{2})^m - \tfrac{3}{n} \quad \text{mit } m,\, n \in \mathbb{N},\, n \neq 0\}.$$
Begründen sie Ihre Aussagen.

23. Es seien A und B beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ und
$$C = \{x + y \mid x \in A \ \wedge\ y \in B\}, \qquad D = \{x \cdot y \mid x \in A \ \wedge\ y \in B\}.$$
Zeigen Sie, dass
$$\sup C = \sup A + \sup B, \qquad \inf C = \inf A + \inf B$$
und dass, falls A und B positive untere Schranken haben,
$$\sup D = \sup A \cdot \sup B, \qquad \inf D = \inf A \cdot \inf B.$$

24. Beweisen Sie folgende Aussagen.
    (a) Ist $x \in \mathbb{R}_+$, $k,\, m \in \mathbb{Z}$ und $l,\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass $mk = nl$, so gilt
    $$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[k]{x^l}.$$
    (b) Es ist korrekt, die Terme auf beiden Seiten in (a) mit $x^{\frac{m}{n}}$ zu bezeichnen.
    (c) Für $x,\, y \in \mathbb{R}_+$ und $r,\, s \in \mathbb{Q}$ gelten die Potenzgesetze
    $$x^r y^r = (xy)^r, \qquad x^r x^s = x^{r+s}, \qquad (x^r)^s = x^{rs}.$$

25.* Zeigen Sie mit Hilfe der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel, dass für $a \in \mathbb{R}_+$ und ganze Zahlen $k \leq l \leq m$ gilt
$$(m-k)a^l \leq (m-l)a^k + (l-k)a^m.$$