Universität Bielefeld SS 2011
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu Analysis I

Blatt 7 - Abgabe bis 26.5.2011

31. Wir definieren eine Folge rekursiv durch
$$x_0 = \frac{1}{2}, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^3 - 3x_n}{2}.$$
Beweisen Sie folgende Aussagen.
   (a) Ist $0 < x_n < 1$, so ist $-1 < x_{n+1} < -x_n$, und ist $-1 < x_n < 0$, so ist $-x_n < x_{n+1} < 1$. (Hinweis: Bernoulli-Ungleichung.)
   (b) Es gilt
$$|x_{n+1}| = \frac{3|x_n| - |x_n|^3}{2}.$$
   (c) $|x_n| \to 1$ $(n \to \infty)$.
   (d) Die Folge x_n hat die Häufungspunkte 1 und -1.

32. Welche der folgenden Mengen sind abgeschlossen, welche sind offen in $\mathbb{R}$?
$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\tfrac{1}{n}, 1 - \tfrac{1}{n}\right], \qquad M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\tfrac{1}{n}, 1 + \tfrac{1}{n}\right],$$
$$N = \left\{ m + \tfrac{1}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N},\, n \neq 0 \right\}.$$

33. Berechnen Sie folgende Reihen, wobei $|q| < 1$ ist:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} nq^n.$$
Hinweis: Berechnen Sie im letzten Beispiel zunächst das $(1-q)^2$-fache der Partialsummen.

34. Berechnen Sie
$$0{,}\overline{135} + 0{,}2\overline{18}, \qquad 0, \overline{35} + 0{,}\overline{64}, \qquad 0{,}\overline{6} + 0{,}\overline{7}.$$
Stellen Sie die Ergebnisse als Dezimalbrüche und als gemeine Brüche dar. Begründen Sie Ihre Rechnung.

35.* Zeigen Sie, dass eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ genau dann gegen a konvergiert, wenn a ihr einziger Häufungspunkt ist.