Universität Bielefeld SS 2011
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu Analysis I

Blatt 8 - Abgabe bis 2.6.2011

36. Es sei $a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots &= \frac{1}{4}\,a, \\ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots &= \frac{3}{4}\,a, \\ 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \ldots &= \frac{2}{3}\,a. \end{aligned}$$

37. Stellen Sie für die folgenden Reihen fest, ob sie alternierend sind und ob sie konvergent sind.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

38. Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} y_n^2$ die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ folgt.
Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung $(x_n \pm y_n)^2 \geq 0$.

39. Untersuchen Sie die Konvergenz folgender Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

40.* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sei divergent, und für alle n sei $x_n > 0$. Wir bezeichnen die Partialsummen mit $s_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$. Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{s_n}$ divergent ist, während die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{s_n^2}$ konvergent ist.
(Hinweis: Zerlegen Sie die Reihe in geeignete Teilstücke bzw. schätzen Sie die Partialsummen durch Teleskopsummen ab.)