Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2011

Übungen zu Analysis I

Blatt 9 - Abgabe bis 9.6.2011

41. Finden Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n \quad (s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}.$$

42. Es seien a, $b \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle Koeffizienten c_n einer Potenzreihe gilt $0 < a \leq c_n \leq b$. Wie groß ist der Konvergenzradius?

43. Finden Sie alle Häufungspunkte der folgenden Mengen:

$$L = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}, \qquad M = \left\{ \frac{n}{|n|+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$N = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \,\middle|\, 0 \neq m \in \mathbb{N},\, 0 \neq n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort. (Im Fall von N gibt es für den Nachweis, dass Sie alle Häufungspunkte gefunden haben, einen Zusatzpunkt.)

44. Zeigen Sie die absolute Konvergenz der Doppelreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(n+im)^3},$$

wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet.
(Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Teilsumme der Glieder mit der Eigenschaft $m \leq n$ und finden Sie eine Schranke für die innere Summe über m. Vertauschen Sie dann die Rollen von m und n.)

45.* Es seien $r > 0$, $s > 0$ derart, dass die Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \qquad g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$$

für $|x| < r$ und $|y| < s$ konvergieren. Beweisen Sie:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es Koeffizienten $c_{n,k}$, so dass

$$f(x)^n = \sum_{k=n}^{\infty} c_{n,k} x^k$$

für $|x| < r$.

(b) Ist $\tilde{f}(x)$ durch die Potenzreihe mit den Koeffizienten $|a_k|$ gegeben und sind $\tilde{c}_{n,k}$ die Koeffizienten von $\tilde{f}(x)^n$, so gilt $|c_{n,k}| \leq \tilde{c}_{n,k}$.

(c) Es gibt ein $t \in (0, r)$ derart, dass $\tilde{f}(|x|) < s$ für $|x| < t$.

(d) Die Funktion $g \circ f$ ist auf der Menge $\{x \,\big|\, |x| < t\}$ durch eine Potenzreihe darstellbar.