Universität Bielefeld 4.10.2011
Prof. W. Hoffmann

Zweite Klausur Analysis I

1. Definieren Sie die Begriffe Grenzwert einer Folge und Cauchyfolge. Beweisen Sie, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist.

2. Für eine gegebene reelle Zahl a definieren wir eine Folge rekursiv durch

$$x_0 = a, \qquad x_{n+1} = e^{x_n} - 1.$$

   Zeigen Sie, dass diese Folge monoton ist. Stellen Sie fest, für welche Anfangswerte a die Folge konvergent ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

3. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

   (a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^3},$$ (b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}.$$

4. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

   (a) $$\lim_{x\to 1} \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{-\ln x}},$$ (b) $$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\,\right).$$

5. Stellen Sie fest, ob die Funktion

$$f(x) = \frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1} - \operatorname{sgn} x$$

   einen Grenzwert an der Stelle 0 besitzt, und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls.

Arbeitszeit: 12.15-14.00 Uhr