Scriptum zur Vorlesung
Analysis I

Prof. W. Hoffmann
Universität Bielefeld
SS 2011

Vorkenntnisse

Viele Themen kamen bereits in Schule vor und werden nun von einem höheren Standpunkt betrachtet. Im Folgenden ist für einige Gegenstände angegeben, wo sie im Unterrichtswerk „Elemente der Mathematik“ von Schrödel vorkommen.

Gegenstand	Band	Abschnitt/*Seite*
Und-Verknüpfung	8	5.2
$\{x \mid P(x)\}$	8	1.6, 5.2
äquivalente Gleichungen	7	7.4.1
Funktion	8	3.1
umkehrbar eindeutige Zuordnung	9	*41*
umkehrbare Funktion	LK	*26*
Monotonie	SII	4.2.1
binomische Formeln (Exponent 2)	8	1.7.2
erste binomische Formel	8	*58*
	SII	*471*
Wurzelgesetz	9	1.4
Wurzeln	10	1.4
Potenzen mit rationalen Exponenten	10	1.5
Potenzgesetze für rationale Exponenten	10	1.6
rekursive Folge	SII	2.1
vollständige Induktion	SII	2.2
Heronverfahren	9	*17*
geometrische Folge	SII	2.3
Grenzwerte von Folgen	SII	2.4
Exponentialfunktion	SII	1.1.1
Stetigkeit	SII	1.3.3
Grenzwerte von Funktionen	SII	1.1.2, 1.3.2
Logarithmusfunktion	SII	1.1.4

Index

1 Logik und Mengenlehre

1.1 Aussagen

Es werden nur Aussage betrachtet, die einen der beiden Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“, abgekürzt w oder f, haben. Aus gegebenen Aussagen kann man durch Verknüpfung neue Aussagen bilden. So ist die *Negation* (auch Verneinung genannt) einer Aussage A, abgekürzt $\neg A$, gegeben durch die Wahrheitstafel

A	$\neg A$
w	f
f	w

Die Verneinung der Aussage

> „Du hast immer Zeit für mich“

ist die Aussage

> „Du hast nicht immer Zeit für mich“.

Verknüpfungen von zwei Aussagen A und B sind z. B. die *Konjunktion* $A \wedge B$ (auch Und-Verknüpfung genannt) sowie die *Disjunktion* $A \vee B$ (auch Oder-Verknüpfung genannt), gegeben durch die Wahrheitstafeln

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beispiele sind die Aussagen

> „Der Beschuldigte hatte ein Motiv und die Gelegenheit für die Tat.“
> „Dieser Neureiche hat eine Erbschaft gemacht oder im Lotto gewonnen.“

Man beachte, dass in der Logik das Wort „oder“ im einschließenden Sinne gebraucht wird.

Die *Implikation* (auch Subjunktion genannt) ist die Aussage $A \Rightarrow B$ (gelesen „wenn A, dann B“), die gegeben ist durch

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Sie drückt keine Ursache-Wirkung-Beziehung aus, z. B.:

> „Wenn du diese Aufgabe lösen kannst, dann bist du ein Genie.“

Schließlich haben wir noch die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ (gelesen „genau dann A, wenn B“) und die Antivalenz $A \succ\!\!\prec B$ (gelesen „entweder A oder B“) mit den Wahrheitstafeln

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

A	B	$A \succ\!\!\prec B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Im täglichen Leben werden diese oft durch die Worte „wenn“ bzw. „oder“ ausgedrückt, z. B.

> „Wenn du mir dein Fahrrad leihst, kannst du mit meinem Ball spielen.“
> „Du gibst mir jetzt den Ball zurück oder ich sag’ es Mutti.“

Ein logisches Gesetz ist eine Verknüpfung von Variablen, die bei jeder Belegung der Variablen mit Aussagen zu einer wahren Aussage wird, z. B.

$$A \Rightarrow A \vee B, \qquad A \wedge B \Rightarrow B.$$

Viele logische Gesetze haben die Struktur einer Äquivalenz, z. B.

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A, \qquad (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A),$$
$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)).$$

(Die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ nennt man übrigens die *Kontraposition* der Implikation $A \Rightarrow B$). Weitere Beispiele sind die *Kommutativgesetze*

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, \qquad A \vee B \Leftrightarrow B \vee A,$$

die *Assoziativgesetze*

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C), \qquad (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C),$$

die *Distributivgesetze*

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

sowie die *de Morganschen Gesetze*

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \qquad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

Um ein logisches Gesetz zu beweisen, müssen wir nachprüfen, dass es für alle möglichen Wahrheitswerte der vorkommenden Variablen wahr ist. Dabei sind die Wahrheitswerte von verschachtelten Verknüpfungen schrittweise zu bestimmen, z. B.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Durch Vergleich mit der Wahrheitstafel für die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ finden wir, dass diese zu der Aussage

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

äquivalent ist.

1.2 Prädikate und Mengen

Der Wahrheitswert des Satzes „Ich bin ein Berliner" hängt von der Bedeutung des Wortes „ich" ab. Ein *Prädikat* (auch *Aussageform* genannt) enthält Variablen und wird erst zu einer Aussage, wenn man diese durch Objekte ersetzt. Wird es zu einer wahren Aussage, so sagt man, dass es für diese Objekte *gilt*. Aussageformen mit einer Variablen nennt man auch Eigenschaften, z. B. „x ist ehrlich", solche mit zwei Variablen nennt man *Relationen*, z. B. „x ist der Vater von y". Wir vereinbaren manchmal Abkürzungen für Prädikate in der Form $P(x)$ oder $Q(x, y)$ usw.

Eine *Menge* ist, naiv gesprochen, eine Zusammenfassungen von Objekten. Manchmal kann man ihre Elemente aufzählen, wobei man sie in geschweifte Klammern einschließt und die Reihenfolge gleichgültig ist, also

$$\{\text{Sonne, Erde, Mond}\} = \{\text{Erde, Mond, Sonne}\}.$$

Wenn ein Objekt zu einer Menge gehört, nennt man es ein *Element* dieser Menge. Die Relation „x ist ein Element von M" wird durch $x \in M$ abgekürzt.

Sie wird zu einer wahren Aussage, wenn wir z. B. x durch J. F. Kennedy und M durch die Menge der Menschen ersetzen.

Manche Prädikate ergeben nur dann einen Sinn, wenn man die Variablen durch Elemente von bestimmten Mengen ersetzt. Wenn ein Prädikat $P(x)$ für alle Elemente einer Menge M gilt, so schreibt man

$$\forall x \in M \; P(x).$$

Wenn wenigstens ein Element der Menge M existiert, für das das Prädikat $P(x)$ gilt, so schreibt man

$$\exists x \in M \; P(x).$$

Die Zeichen $\forall$ und $\exists$ nennt man *Quantoren*.

Im Fall einer endlichen Menge kann man solche Aussagen auch ohne Quantoren formulieren, z. B.

$$\begin{aligned} \forall x \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} \; P(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad P(\mathrm{a}) \wedge P(\mathrm{b}), \\ \exists x \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} \; P(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad P(\mathrm{a}) \vee P(\mathrm{b}). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Gesetze

$$\begin{aligned} \neg \forall x \in M \; P(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists x \in M \; \neg P(x), \\ \neg \exists x \in M \; P(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in M \; \neg P(x) \end{aligned}$$

Verallgemeinerungen der de Morganschen Gesetze sind. Gesetze der Prädikatenlogik kann man nicht mehr durch Wahrheitstafeln nachprüfen. Man legt einige als Axiome fest und gewinnt weitere durch sogenannte Schlussregeln, worauf wir aber nicht eingehen werden.

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir das Schachspiel. Das Ziel des Spiels besteht eigentlich darin, den gegnerischen König zu schlagen. Wohl wegen der Etikette verbietet man Züge, bei denen der Antwortzug den König schlagen könnte.

Definition. *Ein am Zug befindlicher Spieler ist schachmatt, wenn es für jeden möglichen Zug und auch beim Auslassen des Zuges einen Antwortzug gibt, der seinen König schlagen würde.*

Wir erinnern daran, dass in einer *Definition* ein neuer Begriff erklärt wird, indem man ihn mit einem bekannten Begriff gleichsetzt. In diesem Fall ist der bekannte Begriff eine Aussage mit der Struktur

$$\forall x \in M \, \exists y \in N \; Q(x, y).$$

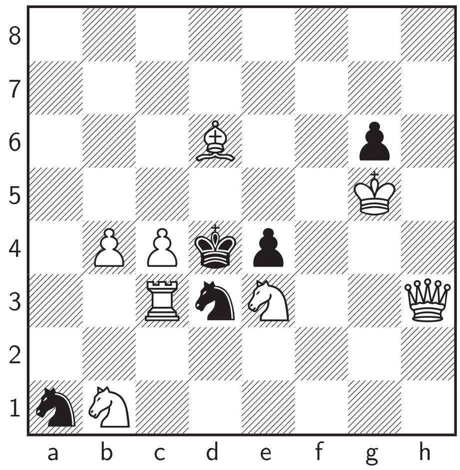


Abbildung 1: Weiß gewinnt in zwei Zügen

(Genaugenommen müsste man $N(x)$ statt N schreiben, da die Menge der erlaubten Antwortzüge vom Zug x abhängt.)

Betrachten wir zum Beispiel eine Schachaufgabe von W. Meredith aus dem Jahr 1886 (siehe Abbildung 1). Nach der Konvention ist in solchen Aufgaben Weiß am Zug. Die Aufgabe besteht also darin, folgende Aussage zu beweisen:

> Es gibt einen Zug von Weiß, so dass es für jeden Antwortzug von Schwarz wiederum einen Zug von Weiß gibt, so dass Schwarz matt ist.

Wir wollen hier nur die einfachere Aufgabe betrachten, dass Weiß in einem Zug gewinnt, wenn Schwarz am Zug ist. Wenn Sie kein Schachbrett zur Hand haben, können Sie die Züge mit dem Applet von L. Ammeraal veranschaulichen, wobei Sie den "edit mode" einschalten müssen.

Die schwarzen Bauern können nicht vorrücken, da weiße Figuren im Weg stehen, und wo sie schlagen könnten, stehen keine weißen Figuren. Würde der schwarze König auf ein freien Feld ziehen, so würde er von weißen Bauern oder dem weißen Läufer geschlagen. Würde er den weißen Bauern, Turm oder Springer schlagen, so würde er vom weißen Turm, dem anderen weißen Springer bzw. der weißen Dame geschlagen werden.

Schwarz kann also nur einen seiner Springer ziehen. Zieht er den vom Feld a1, so ist das Feld c2 nicht mehr gedeckt, und Weiß kann seinen Springer von e3 dorthin ziehen und dabei unter Umständen den schwarzen Springer schlagen. Auf jeden Fall wird er Schach bieten, und das freigewordene Feld e3 ist kein Ausweg für den schwarzen König, da es von der weißen Dame gedeckt ist.

Wenn Schwarz hingegen seinen Springer von d3 zieht, so kann der weiße Turm jetzt den Schutz des Springers auf e3 übernehmen. Wenn der schwarze Springer nicht auf e5 gezogen wurde, kann Weiß seine Dame nach h8 ziehen und Schach bieten. Das freigewordene Feld d3 ist kein Ausweg für den König, weil es vom weißen Turm gedeckt ist. Steht hingegen der schwarze Springer auf e5, so versperrt er dem König die Flucht auf dieses Feld, und der freigesetzte weiße Läufer kann nach c5 gezogen werden, wo er Schach bietet und von einem Bauern geschützt ist. $\triangleleft$

Zwischen Mengen und Prädikaten besteht ein enger Zusammenhang. Ist ein Prädikat $P(x)$ für beliebige Objekte x sinnvoll, so bezeichnet man die Menge aller Objekte, für die $P(x)$ gilt, mit

$$\{x \mid P(x)\}.$$

Umgekehrt ist für jede Menge M das Prädikat $x \in M$ für beliebige Objekte x sinnvoll.

Wenn zwei Prädikate für alle Objekte äquivalent sind, dann sind die zugehörigen Mengen gleich. Also gilt für Mengen M und N genau dann $M = N$, wenn für alle Objekte x gilt $x \in M \Leftrightarrow x \in N$.

Da Mengen auch wieder Objekte sind, führt dieser naive Ansatz leider schnell zu Widersprüchen. Am bekanntesten ist die *Russellsche Antinomie*: Wenn die Menge

$$\{x \mid x \notin x\}$$

Element ihrer selbst ist, dann ist sie es nach ihrer Definition nicht, und umgekehrt. Der Ausweg besteht in der axiomatischen Mengenlehre, die aber unseren Rahmen sprengen würde.

Wir bleiben bei der naiven Mengenlehre und führen nun eine Mengenrelation und Mengenoperationen ein.

Definition 1. *Wir sagen, dass die Menge M eine* Teilmenge *der Menge N ist, abgekürzt $M \subseteq N$, wenn für alle Objekte x gilt $x \in M \Rightarrow x \in N$. Wir sagen, dass M eine* echte Teilmenge *von N ist, abgekürzt $M \subset N$, wenn $M \subseteq N$ und $M \neq N$.*

Wir definieren die Schnittmenge *und die* Vereinigungsmenge *von Mengen M und N als*

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}, \quad M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}.$$

Schließlich definieren wir die Differenzmenge *von M und N als*

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$$

sowie die Produktmenge *von M und N (auch* Cartesisches Produkt *genannt) als*

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}.$$

Objekte der Form (x, y) nennt man geordnete Paare. Man legt fest, dass genau dann[1] *$(v, w) = (x, y)$ gilt, wenn $v = x$ und $w = y$.*

Aus den logischen Gesetzen folgen nun leicht die Gesetze der Mengenlehre:

Satz 1. *Für beliebige Mengen K, L, M und N gelten die Kommutativgesetze*

$$M \cap N = N \cap M, \qquad M \cup N = N \cup M,$$

die Assoziativgesetze

$$(L \cap M) \cap N = L \cap (M \cap N), \qquad (L \cup M) \cup N = L \cup (M \cup N),$$

die Distributivgesetze

$$L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N), \quad L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N),$$
$$(K \cap L) \times (M \cap N) = (K \times M) \cap (L \times M), \quad L \times (M \cup N) = L \times M \cup L \times N$$

und die de Morganschen Gesetze

$$L \setminus (M \cap N) = (L \setminus M) \cup (L \setminus N), \qquad L \setminus (M \cup N) = (L \setminus M) \cap (L \setminus N).$$

Beweis. Das erste Gesetz ist dazu äquivalent, dass für alle Objekte x genau dann $x \in M \wedge x \in N$ gilt, wenn $x \in N \wedge x \in M$ gilt. Das ist aber nach dem Kommutativgesetz der Konjunktion erfüllt. Ähnlich beweist man die anderen Gesetze. □

1.3 Abbildungen

Eine *Abbildung* f von einer Menge M in eine Menge N ordnet jedem Element x von M genau[2] ein Element von N zu, das man mit $f(x)$ bezeichnet. Man nennt M den *Definitionsbereich* und N den *Zielbereich* von f. Die Menge

$$\{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\}$$

wird der *Graph* von f genannt. Die Worte „Abbildung f von M in N" kürzt man durch $f : M \to N$ oder $M \xrightarrow{f} N$ ab.

[1] in Definitionen lässt man die Worte „genau dann" meist weg.

[2] Wenn aus dem Zusammenhang nicht klar ist, ob „ein" als Artikel oder Zahlwort gemeint ist, sagt man im ersten Fall „mindestens ein" und im zweiten Fall „genau ein".

Dies ist eigentlich keine Definition, da der neue Begriff „Abbildung“ auf den ebenfalls noch nicht definierten Begriff „Zuordnung“ zurückgeführt wird. Ein Ausweg besteht darin, Graphen als Grundbegriffe und Abbildungen nur als bequeme Sprechweise aufzufassen.

Ist $f(x)$ durch einen Term gegeben, so nennt man diesen auch eine (Abbildungs-)Vorschrift. Wir schreiben $f = g$, wenn die Abbildungen f und g gleiche Definitionsbereiche und gleiche Zielbereiche haben und für alle Elemente x des Wertebereichs gilt $f(x) = g(x)$. Für jede Menge M ist die *identische Abbildung* $\mathrm{id}_M : M \to M$ durch $\mathrm{id}_M(x) = x$ gegeben. Die Menge aller Abbildungen von einer Menge M in eine Menge N bezeichnen wir mit N^M.

Definition 2. *Ist* $f : M \to N$ *und* $g : L \to M$*, so ist die* Verkettung *von* f *mit* g *die Abbildung* $f \circ g : L \to N$*, die gegeben ist durch*

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Man prüft unmittelbar nach, dass für $f : M \to N$ gilt

$$f \circ \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_N \circ f = f$$

und dass für $K \xrightarrow{h} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$ gilt

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Definition 3.

(i) *Die Abbildung* $f : M \to N$ *heißt* injektiv[3]*, wenn für alle Elemente* u *und* v *von* M *gilt*

$$u \neq v \quad \Longrightarrow \quad f(u) \neq f(v).$$

(ii) *Die Abbildung* $f : M \to N$ *heißt* surjektiv[4]*, wenn es für jedes Element* y *von* N *ein Element* x *von* M *gibt, so dass* $f(x) = y$*.*

(iii) *Die Abbildung* $f : M \to N$ *heißt* bijektiv[5]*, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.*

(iv) *Eine Abbildung* $h : N \to M$ *heißt* Umkehrabbildung *von* $f : M \to N$*, wenn für alle* $x \in M$ *und* $y \in N$ *gilt*

$$f(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad h(y) = x.$$

[3] oder eineindeutig

[4] oder Abbildung von M **auf** N

[5] oder umkehrbar eindeutig

Die Bedingung für die Injektivität ist natürlich äquivalent zu ihrer Kontraposition

$$f(u) = f(v) \quad \Longrightarrow \quad u = v.$$

Definiert man den *Wertebereich* von f als

$$\{y \in N \mid \exists x \in M \; f(x) = y\},$$

so bedeutet die Surjektivität, dass der Wertebereich gleich dem Zielbereich ist. Es ist klar, dass eine Abbildung nur eine Umkehrabbildung haben kann.

Satz 2. (i) *Die Verkettung von injektiven Abbildungen ist injektiv.*

(ii) *Die Verkettung von surjektiven Abbildungen ist surjektiv.*

(iii) *Eine Abbildung $f : M \to N$ ist genau dann bijektiv, wenn sie eine Umkehrabbildung besitzt.*

Beweis. **(i)** In den Bezeichnungen von Definition 2 seien u und v beliebige Elemente von L. Ist $u \neq v$, so folgt wegen der Injektivität von g, dass $g(u) \neq g(v)$, und wegen der Injektivität von f, dass $f(g(u)) \neq f(g(v))$, was nach Definition 2 bedeutet, dass $f \circ g(u) \neq f \circ g(v)$.

(ii) Ist z ein beliebiges Element von N, so gibt es wegen der Surjektivität von g ein Element y von N, so dass $f(y) = z$, und wegen der Surjektivität von g gibt es dann ein Element x von L, so dass $g(x) = y$. Nach Definition 2 gilt dann $f \circ g(x) = z$.

(iii) Angenommen, h ist die Umkehrabbildung von f. Sind u und v Elemente von M und bezeichnen wir $f(u) = r$ und $f(v) = s$, so gilt $h(r) = u$ und $h(s) = v$. Aus $r = s$ folgt wegen der Eindeutigkeit von h, dass $u = v$, also ist f injektiv. Ist y ein beliebiges Element von N, so hat das Element $x = h(y)$ die Eigenschaft $f(x) = y$, also ist f surjektiv. Zusammenfassend erhalten wir, dass f bijektiv ist.

Zum Beweis der Umkehrung nehmen wir an, dass f bijektiv ist. Ist y ein beliebiges Element von N, so gibt es wegen der Surjektivität ein Element x von M mit (der Eigenschaft) $f(x) = y$, und wegen der Injektivität von f ist x eindeutig bestimmt. Wir können also festlegen, dass $h(y) = x$ ist. Offensichtlich ist die so definierte Abbildung h die Umkehrabbildung von f. □

Ist $f : M \to N$ und $K \subseteq M$ sowie $L \subseteq N$, wobei L den Wertebereich von f enthält, so definieren wir die *Einschränkung* $f|_K : K \to N$ und die *Beschränkung* $_L|f : M \to L$ als die Abbildungen mit der selben Abbildungsvorschrift wie f. Bei geeigneter Wahl von K und L erhält man eine bijektive Abbildung $_L|f|_K$.

2 Zahlbereiche

2.1 Kardinalzahlen

Ohne zu wissen, was eine Zahl ist, können wir sagen, ob zwei Mengen gleich viele Elemente haben.

Definition 4. *Wir sagen, dass die Menge M* gleichmächtig *zur Menge N ist (abgekürzt $M \sim N$), wenn es eine bijektive Abbildung von M auf N gibt.*

Satz 3. *Die Relation der Gleichmächtigkeit ist eine* Äquivalenzrelation*, das heißt, für beliebige Mengen L, M und N gilt:*

(i) $M \sim M$ *(Reflexivität)*

(ii) $M \sim N \;\Leftrightarrow\; N \sim M$ *(Symmetrie)*

(iii) $L \sim M \;\wedge\; M \sim N \;\Rightarrow\; L \sim N$ *(Transitivität)*

Beweis. Eigenschaft (i) folgt aus der Existenz von id_M, Eigenschaft (ii) aus Satz 2(iii) und Eigenschaft (iii) aus Satz 2(i),(ii). □

Die Mächtigkeitsklasse einer Menge M umfasst all diejenigen Mengen, die gleichmächtig zu M sind. Mit Hilfe des Satzes zeigt man, dass jede Menge M zu genau einer Mächtigkeitsklasse gehört. Wir sparen uns die Arbeit, Zahlen als zusätzliche Objekte einzuführen.

Definition 5. *Die* Mächtigkeit *einer Menge M, abgekürzt $|M|$, ist die Klasse aller Mengen, die gleichmächtig zu M sind. Jede solche Klasse nennen wir* Kardinalzahl*.*

(Die Menge aller Mengen kann es wegen der Russellschen Antinomie nicht geben, die Klasse aller Mengen schon.)

Wir nennen zwei Mengen *disjunkt*, wenn ihre Schnittmenge leer ist.

Satz 4. *Es seien K, L, M und N Mengen, so dass*

$$K \sim M, \qquad L \sim N.$$

Dann gilt

$$K \times L \sim M \times N, \qquad L^K \sim N^M.$$

Ist außerdem K disjunkt zu L und M disjunkt zu N, so ist

$$K \cup L \sim M \cup N.$$

Beweis. Sind bijektive Abbildungen $p : K \to M$ und $q : L \to N$ gegeben, so können wir Abbildungen

$$f : K \times L \to M \times N, \qquad g : L^K \to N^M$$

durch die Vorschriften

$$f(x, y) = (p(x), q(y)), \qquad g(r) = q \circ r \circ s$$

definieren, wobei s die Umkehrabbildung von p bezeichnet. Ist außerdem K disjunkt zu L und M disjunkt zu N, so können wir eine Abbildung $h : K \cup L \to M \cup N$ durch

$$h(x) = \begin{cases} p(x) & \text{wenn } x \in K, \\ q(x) & \text{wenn } x \in L \end{cases}$$

definieren. Die Nachprüfung, dass f, g und h bijektiv sind, ist eine Übung. $\square$

Der Satz rechtfertigt die folgende Definition.

Definition 6. *Sind m und n Kardinalzahlen, also $m = |M|$ und $n = |N|$ für gewisse Mengen M und N, so definieren wir*

$$m \cdot n = |M \times N|, \qquad n^m = |N^M|.$$

Sind außerdem M und N disjunkt[6]*, so definieren wir*

$$m + n = |M \cup N|.$$

Satz 5. *Für beliebige Kardinalzahlen l, m und n gelten die Kommutativgesetze*

$$m + n = n + m, \qquad m \cdot n = n \cdot m,$$

die Assoziativgesetze

$$(l + m) + n = l + (m + n), \qquad (l \cdot m) \cdot n = l \cdot (m \cdot n),$$

das Distributivgesetz

$$l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n$$

und die Potenzgesetze

$$(m \cdot n)^l = m^l \cdot n^l, \qquad n^{l+m} = n^l \cdot n^m, \qquad n^{l \cdot m} = (n^l)^m.$$

[6] Man kann gegebene Mengen M und N durch disjunkte gleichmächtige Mengen ersetzen, z. B. $M \times \{M\}$ und $N \times \{N\}$.

Beweis. Wir wählen Mengen L, M und N, so dass $|L| = l$, $|M| = m$ und $|N| = n$. Das Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition sowie das Distributivgesetz folgen unmittelbar aus den entsprechenden Gesetzen in Satz 1. Dabei muss man im letzten Fall voraussetzen, dass M und N disjunkt sind, und im zweiten Fall, dass L, M und N paarweise disjunkt sind.

Zum Beweis der Gesetze für die Multiplikation genügt es zu zeigen, dass

$$M \times N \sim N \times M, \qquad (L \times M) \times N \sim L \times (M \times N).$$

Die dazu benötigten bijektiven Abbildungen sind durch

$$f(x, y) = (y, x), \qquad g((x, y), z) = (x, (y, z))$$

gegeben. Der Beweis der Potenzgesetze ist eine Übungsaufgabe. □

Satz 6 (Cantor)**.** *Ist $\mathcal{P}$ die Menge aller Teilmengen der Menge M, dann gibt es keine surjektive Abbildung $f : M \to \mathcal{P}$.*

Beweis. Es sei F eine beliebige Abbildung von M in $\mathcal{P}$. Wir betrachten die Teilmenge

$$L = \{x \in M \mid x \notin F(x)\}$$

von M. Nun sei u irgend ein Element von M. Wenn $u \in F(u)$ ist, so ist laut Definition $u \notin L$, ist hingegen $u \notin F(u)$, so gilt $u \in L$. Auf jeden Fall können die Mengen $F(u)$ und L nicht übereinstimmen, das heißt, es gibt kein $u \in M$ mit der Eigenschaft $F(u) = L$, und somit ist F nicht surjektiv. □

Die Menge $\mathcal{P}$, die man die *Potenzmenge* von M nennt, ist also mächtiger als M, wenn man diesen Begriff geeignet definiert.

2.2 Angeordnete Körper

Aus der Schule ist der Bereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen bekannt. Dieser ist ein Körper.

Definition 7. *Ein* Körper *ist eine Menge K zusammen mit zwei Abbildungen $K \times K \to K$, genannt Addition und Multiplikation und abgekürzt in der bekannten Weise, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Es gelten die Kommutativ- und Assoziativgesetze für Addition und Multiplikation sowie das Distributivgesetz.*

(ii) *K hat verschiedene Elemente 0 und 1, so dass für alle Elemente x von K gilt $x + 0 = x$ und $x \cdot 1 = x$.*

(iii) *Für beliebige Elemente x und y von K gibt es ein Element d von K, so dass $x = y + d$.*

(iv) *Für beliebige Elemente x von K und y von $K \setminus \{0\}$ gibt es ein Element q von K, so dass $x = y \cdot q$.*

Man nennt die Bilder eines Paares (x, y) unter Addition bzw. Multiplikation die *Summe* bzw. das *Produkt*. Es ist leicht zu sehen, dass die Elemente 0, 1 und (für gegebene x und y) d und q eindeutig bestimmt sind. Man nennt d die *Differenz* und q den *Quotienten* von x und y, abgekürzt $x - y$ bzw. $x : y$. Statt $0 - y$ schreibt man auch $-y$. Abbildungen von einer Menge in einen Körper nennt man *Funktionen*.

In dieser Vorlesung werden wir die Konstruktion von $\mathbb{Q}$, die algebraischer Natur ist, nicht durchführen. Die Elemente entstehen als Äquivalenzklassen $\frac{a}{b}$ von Paaren (a, b) ganzer Zahlen mit der Eigenschaft $b \neq 0$. Eine ganze Zahl a wird mit der rationalen Zahl $\frac{a}{1}$ identifiziert, so dass der Bereich $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen zu einer Teilmenge von $\mathbb{Q}$ wird, und dann ist $\frac{a}{b}$ das Selbe wie $a : b$.

Im Unterschied zur Algebra spielt in der Analysis die Anordnung der Körperelemente eine wichtige Rolle.

Definition 8. *Ein* angeordneter Körper *ist ein Körper K zusammen mit einer Teilmenge K_+, die folgende Eigenschaften hat:*

(i) *Für jedes Element x von K gilt genau eine der Aussagen $x \in K_+$, $-x \in K_+$, $x = 0$.*

(ii) *Für alle Elemente x und y von K_+ ist $x + y \in K_+$ und $x \cdot y \in K_+$.*

Wir sagen, dass x größer bzw. kleiner als y ist, abgekürzt $x > y$ bzw. $x < y$, wenn $x - y \in K_+$ bzw. $y - x \in K_+$ ist. Die Aussage „$x < y$ oder $x = y$“ kürzen wir mit $x \leq y$ ab, die Aussage „$x > y$ oder $x = y$“ mit $x \geq y$.

Aus der Schule ist bekannt, dass die Menge $\mathbb{Q}_+$, die aus allen rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$ besteht, bei denen m und n positive ganze Zahlen sind, diese Eigenschaften hat.

Aus der Definition folgt sofort für alle Elemente x, y, z von K:

$$\begin{aligned} x < y \ \wedge \ y < z \quad &\Rightarrow \quad x < z, \\ x < y \quad &\Rightarrow \quad -x > -y, \\ x < y \quad &\Rightarrow \quad x + z < y + z, \\ x < y \ \wedge \ z > 0 \quad &\Rightarrow \quad x \cdot z < y \cdot z. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der ersten Regel (Transitivität) können wir die letzten beiden (genannt *Monotoniegesetze*) verallgemeinern:

$$\begin{aligned} x < y \ \wedge\ z < w \quad &\Rightarrow \quad x + z < y + w, \\ 0 < x < y \ \wedge\ 0 < z < w \quad &\Rightarrow \quad x \cdot z < y \cdot w, \end{aligned} \tag{1}$$

und aus der zweiten und der letzten Regel folgt

$$x < y \ \wedge\ z < 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot z > y \cdot z.$$

Unterscheiden wir die Fälle in Definition 8(i), so folgt nun

$$x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot x > 0.$$

Schließlich gilt

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} > 0,$$

weil die anderen Fälle für $\frac{1}{x}$ zum Widerspruch führen würden.

Definition 9. *Es seien K und L angeordnete Körper und $M \subseteq K$. Eine Funktion $f : M \to L$ heißt* monoton wachsend, *wenn für alle Elemente x und y von M gilt*

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

Sie heißt monoton fallend, *wenn für alle x und y gilt*

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y).$$

Sie heißt streng monoton wachsend *bzw.* fallend, *wenn dieselben Aussagen mit $<$ und $>$ an Stelle von $\leq$ und $\geq$ gelten.*

Die durch $f(x) = x \cdot x$ gegebene Funktion $f : K_+ \to K$ ist streng monoton wachsend. Dies folgt aus Definition 8(ii) und

$$f(y) - f(x) = (y + x) \cdot (y - x).$$

Die durch $g(x) = \frac{1}{x}$ gegebene Funktion $g : K_+ \to K$ ist streng monoton fallend. Dies folgt, indem wir $y - x$ mit $\frac{1}{x \cdot y} \in K_+$ multiplizieren.

Offensichtlich ist jede streng monotone Funktion injektiv.

2.3 Vollständige Induktion

Naiv gesprochen ist eine *natürliche Zahl* eine Kardinalzahl, die die Mächtigkeit einer endlichen Menge ist. Dazu muss man zunächst den Begriff einer endlichen Menge definieren, was unseren Rahmen sprengen würde. Man kann die Theorie so aufbauen, dass die natürlichen Zahlen die Elemente einer Menge $\mathbb{N}$ sind (was strenggenommen mit unserer naiven Auffassung von Kardinalzahlen als Klassen nicht vereinbar ist).

Satz 7. *Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $0 \in M$,

(ii) $n \in M \;\Rightarrow\; n+1 \in M$.

Dann ist $M = \mathbb{N}$. Außerdem hat $\mathbb{N}$ selbst die Eigenschaften (i) *und* (ii).

Den Beweis werden wir hier nicht geben. Aufgrund des Zusammenhangs zwischen Mengen und Prädikaten können wir den Satz umformulieren.

Folgerung 1. *Es sei $P(n)$ ein Prädikat, das für alle natürlichen Zahlen n definiert ist, und es gelte*

(i) $P(0)$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} \big(P(n) \Rightarrow P(n+1)\big)$.

Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n)$.

Die Beweismethode der *vollständigen Induktion* zum Beweis einer Aussage $\forall n \in \mathbb{N} \; P(n)$ beinhaltet die Nachprüfung der Aussagen (i) und (ii). Diese Beweisschritte nennt man *Induktionsanfang* und *Induktionsschritt*. Innerhalb des Induktionsschrittes nennt man $P(n)$ die *Induktionsvoraussetzung* und $P(n+1)$ die *Induktionsbehauptung*.

Satz 8. *Sind m und n natürliche Zahlen, so auch $m+n$, $m \cdot n$ und m^n.*

Beweis. Wir halten m fest und beweisen die erste Behauptung mit Hilfe der vollständigen Induktion nach der Variablen n.

Induktionsanfang: Wegen $m + 0 = m$ ist $m + 0 \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Es sei $m + n \in \mathbb{N}$. Nach dem Assoziativgesetz gilt $m + (n+1) = (m+n) + 1$, und nach Satz 7 ist $(m+n)+1 \in \mathbb{N}$.

Der Beweis der anderen Behauptungen ist ähnlich und benutzt jeweils die vorangehende Behauptung. □

Satz 9. *Hat eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ kein kleinstes Element, so ist sie leer.*

Beweis. Angenommen, $M \subseteq \mathbb{N}$ und M hat kein kleinstes Element. Wir betrachten das Prädikat

$$P(n) \;\Leftrightarrow\; \forall m \in M \;\; n < m$$

Es gilt $P(0)$, denn sonst wäre 0 das kleinste Element von M.

Angenommen, es gilt $P(n)$. Dann gilt für alle Elemente m von M, dass $n + 1 \leq m$. Gäbe es ein m in M, für das Gleichheit gilt, so wäre dies das kleinste Element von M. Das war ausgeschlossen, also gilt für alle m, dass $n+1 < m$. Damit ist der Induktionsschritt abgeschlossen, und $\forall n \in \mathbb{N}\; P(n)$.

Ist nun $m \in M$, so gilt nach dem Beweisenen $m < m$, was nicht sein kann. Also ist $M = \varnothing$. □

Die Kleiner-Relation auf $\mathbb{N}$ ist also eine *Wohlordnung*, d. h.:

Folgerung 2. *Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element.*

Nun sei K ein Körper. Für eine natürliche Zahl n und ein Element x von K definieren wir die Elemente von K

$$n \cdot x = \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ Summanden}}, \qquad (-n) \cdot x = -\, n \cdot x,$$

$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ Faktoren}}, \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

insbesondere $0 \cdot x = 0_K$ und $x^0 = 1_K$ (das Null- bzw. Einselement von K). Traditionell lässt man das Multiplikationszeichen weg, wenn keine Verwechslungen drohen. Mit Hilfe der vollständigen Induktion kann man beweisen, dass für diese Operationen die Assoziativ- und Distributivgesetze sowie die Potenzgesetze gelten, und dass im Falle einer natürlichen Zahl m an Stelle von x die obigen Formeln auch in $\mathbb{N}$ gelten. Des Weiteren lassen sich folgende Aussagen beweisen, die Bestandteil des Schulstoffs sind.

Satz 10. *Für jede natürliche Zahl n und Elemente x, y von K gilt die erste binomische Formel*

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + y^n$$

und die dritte binomische Formel

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2} y + \ldots + y^{n-1}),$$

wobei die Binomialkoeffizienten für $n \geq k$ durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \qquad k! = 1 \cdot 2 \cdots k$$

definiert sind.

Ersetzen wir y durch $-y$, so erhalten wir die zweite und vierte binomische Formel.

Für jede natürliche Zahl m gibt es eine Abwandlung von Satz 7 und Folgerung 1, bei der die Eigenschaft (i) durch $P(m)$ ersetzt und Eigenschaft (ii) nur für alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft $n \geq m$ vorausgesetzt wird. Dann ergibt sich die Gültigkeit von $P(n)$ nur für $n \geq m$. Dies wird klar, wenn man das Prädikat $Q(k) \Leftrightarrow P(m+k)$ betrachtet.

Wir betrachten nun einen angeordneten Körper K. Wir identifizieren die natürliche Zahl 1 mit dem Einselement 1_K von K und allgemein jede ganze Zahl n mit $n1_K$. Die Monotoniegesetze (1) der Addition und Multiplikation kann man mittels vollständiger Induktion auf endlich viele Faktoren verallgemeinern.

Satz 11. *Für jede natürliche Zahl n, die größer oder gleich 1 ist, und alle Elemente $x_1, \ldots, x_n$ von K_+ mit der Eigenschaft*

$$x_1 \cdots x_n = 1$$

gilt

$$x_1 + \ldots + x_n \geq n.$$

Die Elemente von K werden wir Zahlen nennen.

Beweis. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial. Angenommen, die Behauptung gilt für n Zahlen. Haben wir nun $x_1 \cdots x_n x_{n+1} = 1$, so wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf die Zahlen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ und $x_n x_{n+1}$ an und erhalten

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n.$$

Addiere 1 auf beiden Seiten. Es genügt zu zeigen

$$x_n + x_{n+1} \geq x_n x_{n+1} + 1,$$

d. h. $x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} - 1 \geq 0$, d. h.

$$(x_n - 1)(1 - x_{n+1}) \geq 0.$$

Nach Kontraposition des Monotoniegesetzes der Multiplikation gibt es i, j, so dass $x_i \geq 1$, $x_j \leq 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $i = n$, $j = n + 1$. □

Mit etwas mehr Sorgfalt kann man sogar beweisen, dass in der behaupteten Ungleichung nur dann Gleichheit eintreten kann, wenn alle n Elemente gleich 1 sind.

Mit Hilfe von Summen- und Produktzeichen

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = x_m + x_{m+1} + \ldots + x_n, \qquad \prod_{k=m}^{n} x_k = x_m x_{m+1} \cdots x_n$$

(wobei $m \leq n$) lassen sich der letzte Satz und die binomischen Formeln kompakter formulieren, z. B.

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \\ x^n - y^n &= (x-y) \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^{k-1}, \\ n! &= \prod_{k=1}^{n} k. \end{aligned}$$

Man definiert noch

$$\sum_{k=m}^{m-1} x_k = 0, \qquad \prod_{k=m}^{m-1} x_k = 1,$$

und dann gelten diese Formeln auch für $n = 0$.

Formeln mit Auslassungspunkten ergeben genaugenommen keine korrekte Definition. Eigentlich muss man Potenzen, Fakultät, Binomialkoeffizienten, Summen- und Produktzeichen rekursiv definieren, z. B.

$$\begin{aligned} x^0 &= 1, & x^{n+1} &= x^n \cdot x, \\ 0! &= 1, & (n+1)! &= n!(n+1). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der vollständigen Induktion lässt sich auch beweisen, dass jede nichtleere endliche Teilmenge M eines angeordneten Körpers ein kleinstes und ein größtes Element besitzt, abgekürzt $\min M$ und $\max M$. Dies ist offensichtlich für $|M| = 1$, folgt direkt aus der Definition der Anordnung für $|M| = 2$, und im Induktionsschritt ermittelt man das kleinste Element einer Menge $M \cup \{\mathrm{a}\}$ durch Vergleich von $\min M$ und a.

Satz 12 (Bernoulli-Ungleichung)**.** *Für alle ganzen Zahlen n und alle Elemente x von K mit der Eigenschaft $x > -1$ gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Für $n = 0$ ist nichts zu beweisen. Angenommen, die Ungleichung gilt für eine natürliche Zahl n. Dann ist laut rekursiver Definition

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x).$$

Aus Induktionsvoraussetzung und Monotoniegesetz folgt wegen $1 + x > 0$

$$(1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x).$$

Nach den Rechengesetzen erhalten wir

$$(1 + nx)(1 + x) = (1 + nx) + (x + nx^2) = 1 + (n + 1)x + nx^2.$$

Wegen $n \geq 0$ und $x^2 \geq 0$ ist nach den Monotoniegesetzen

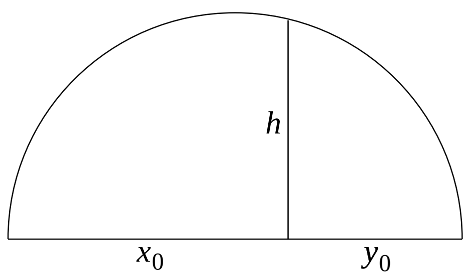
$$1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

Nun folgt die Behauptung für $n + 1$ statt n mit der Transitivität.

Der Beweis für $n < 0$ ist eine Übungsaufgabe. □

3 Grenzwerte

3.1 Motivation



Bereits im alten Griechenland untersuchte man die Aufgabe, zu einem Rechteck ein flächengleiches Quadrat zu finden. Bezeichnen wir die Seitenlängen mit x_0 und y_0 sowie den Flächeninhalt mit $a = x_0 y_0$, so lässt sich die gesuchte Quadratseite g geometrisch leicht mit Hilfe des Höhensatzes konstruieren und wird darum das *geometrische Mittel* von x_0 und y_0 genannt. (Wir können die Bezeichnungen so wählen, dass $x_0 \geq y_0$, also $x_0^2 \geq a$.) Die arithmetische (d. h. rechnerische) Bestimmung ist schwieriger. Das *arithmetische Mittel* liefert nicht die Antwort (außer wenn $x_0 = y_0$), aber das flächengleiche Rechteck mit den Seitenlängen

$$x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2}, \qquad y_1 = \frac{a}{x_1}$$

kommt einem Quadrat schon näher. Bereits in einer Formelsammlung des Heron von Alexandria findet sich die Idee, diesen Schritt zu iterieren (d. h. wiederholt auszuführen) mit dem Ziel, dem gesuchten Quadrat beliebig nahe zu kommen. So erhält man eine Folge $x_0, x_1, x_2 \ldots$

Eine unendliche Folge in einer Menge M ist genaugenommen eine Abbildung $\mathbb{N} \to M$. Man betrachtet auch endliche Folgen und solche, die nicht mit dem nullten Glied beginnen. Eine Folge der Länge zwei ist ein geordnetes

Paar (x_1, x_2), eine Folge (x_1, x_2, x_3) der Länge drei nennt man auch Tripel usw., und man sollte strenggenommen jede Folge als Objekt in Klammern einschließen.

Satz 13. *Sind a und x_0 positive Elemente eines angeordneten Körpers, so dass $x_0^2 \geq a$, und definieren wir eine Folge x_n rekursiv durch*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

so gilt für alle n

$$x_n > 0, \qquad x_n^2 \geq a, \qquad x_{n+1} \leq x_n,$$

und für alle m und n mit der Eigenschaft $m \leq n$ gilt

$$x_m - x_n \leq 2^{1-m}(x_0 - x_1).$$

Beweis. Die erste Behauptung zeigt man leicht durch vollständige Induktion. Die zweite Behauptung gilt für $n = 0$ nach Voraussetzung, und setzen wir $y_n = \frac{a}{x_n}$, so ist

$$0 \leq (x_n - y_n)^2 = x_n^2 - 2x_n y_n + y_n^2 = (x_n + y_n)^2 - 4x_n y_n,$$

d. h. $(x_n + y_n)^2 \geq 4a$, also gilt die zweite Behauptung für $n + 1$ an Stelle von n. (Dies war kein Induktionsbeweis.)

Nun ist $\frac{a}{x_n} \leq x_n$, und mit der rekursiven Definition und den Monotoniegesetzen folgt

$$x_{n+1} \leq x_n.$$

Für alle n gilt

$$x_{n+1} - x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n - x_{n+1}) + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x_n x_{n+1}}\right)(x_n - x_{n+1}),$$

und wegen $\frac{a}{x_n x_{n+1}} > 0$ folgt

$$x_{n+1} - x_{n+2} \leq \frac{1}{2}(x_n - x_{n+1}).$$

Hieraus folgt durch vollständige Induktion, dass

$$x_n - x_{n+1} \leq 2^{-n}(x_0 - x_1),$$

wobei der Induktionsanfang trivial ist. Schließlich gilt für $m \leq n$

$$x_m - x_n = \sum_{i=m}^{n-1}(x_i - x_{i+1}) \leq (x_0 - x_1)\sum_{i=m}^{n-1} 2^{-i},$$

und die rechte Summe ist gleich $2(2^{-m} - 2^{-n})$ laut dritter binomischer Formel. Mit dem Momotoniegesetz folgt die letzte Behauptung im Satz. $\square$

Um festzustellen, ob unsere Folge den gesuchten Wert beliebig genau annähert, muss man zunächst festlegen, was man genau damit meint.

3.2 Definition von Grenzwerten

Um die Genauigkeit einer Näherung zu messen, benutzt man Absolutbeträge.

Definition 10. *Ein* Absolutbetrag *auf einem Körper K ist eine Abbildung von K in einen angeordneten Körper L, abgekürzt*[7] $x \mapsto |x|$, *so dass für alle Elemente x und y von K gilt*

$$|x| \geq 0, \qquad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \qquad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Der Absolutbetrag heißt archimedisch*, wenn es für jedes Element y von L_+ eine natürliche Zahl n gibt, so dass $|n \cdot 1_K| > y$.*

Ein archimedischer Absolutbetrag heißt normiert, wenn für alle natürlichen Zahlen n und alle Elemente x von K gilt $|nx| = n|x|$.

Ist K ein angeordneter Körper (z. B. $\mathbb{Q}$), so wird durch

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0, \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

ein Absolutbetrag mit Werten in K definiert. Dies kann man leicht durch Fallunterscheidung nachprüfen. Für diesen Absolutbetrag gilt

$$|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y.$$

Definition 11. *Eine unendliche Folge von Elementen x_n in K* konvergiert *gegen das Element a, abgekürzt $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, wenn es für jedes positive Element ε von L eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft $n \geq n_0$ gilt*

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

In Formeln ausgedrückt bedeutet $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ also

$$\forall \varepsilon \in L_+ \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} \, (n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$

An Stelle von n kann jede andere Variable stehen.

[7] Nicht zu verwechseln mit der Mächtigkeit!

Beispiel. Für einen normierten archimedischen Absolutbetrag konvergiert die *harmonische Folge* gegen Null, d. h. für alle $x \in K$ gilt

$$\frac{x}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Ist nämlich $\varepsilon > 0$, so gibt es eine natürliche Zahl n_0, so dass $n_0 > \frac{|x|}{\varepsilon}$, und dann gilt für alle n mit $n \geq n_0$

$$\left|\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|}{n_0} < \varepsilon,$$

wobei wir die linke Gleichheit aus der Normiertheitsbedingung[8] gewinnen, indem wir x durch $\frac{x}{n}$ ersetzen. $\triangleleft$

Satz 14. *Konvergiert die Folge x_n sowohl gegen a als auch gegen b, so ist $a = b$.*

Beweis. Angenommen, $a \neq b$. Dann ist $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$ positiv, also gibt es n_0 und n_1, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \varepsilon$ und für $n \geq n_1$ gilt $|x_n - b| < \varepsilon$. Für $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ gelten beide Ungleichungen, und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon$$

(Widerspruch). Also war unsere Annahme falsch. □

Damit ist die folgende Definition gerechtfertigt.

Definition 12. *Konvergiert eine Folge x_n gegen a, so nennt man a den* Grenzwert *der Folge und bezeichnet ihn mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Besitzt eine Folge einen Grenzwert in K, so heißt sie* konvergent *in K, andernfalls* divergent *in K.*

Satz 15. *Jede konvergente Folge x_n ist beschränkt, d. h. es existiert ein Element c von L, so dass für alle natürlichen Zahlen n gilt $|x_n| \leq c$.*

Beweis. Ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, so gibt es ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < 1$, also nach der Dreiecksungleichung

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|,$$

und die Behauptung folgt mit

$$c = \max\{|x_0|, \ldots, |x_{n-1}|, 1 + |a|\}.$$ □

[8] Diese Bedingung ist eigentlich nicht nötig, wie ein Satz von Ostrowski zeigt.

Von nun an sei der Absolutbetrag immer archimedisch und normiert.

Beispiel. Wir betrachten die *arithmetische Folge* $x_n = x_0 + nd$, wobei $d \in K$.

Ist $d = 0$, so ist $x_n = x_0$ für alle n, also $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$.

Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$n|d| = |x_n - x_0| \leq |x_n| + |x_0|.$$

Ist $d \neq 0$, dann kann es kein $c \in L$ geben, so dass $|x_n| \leq c$ für alle n. Also ist die Folge dann unbeschränkt und nach Satz 15 divergent. $\triangleleft$

Beispiel. Wir betrachten die *geometrische Folge* $x_n = x_0 q^n$, wobei $q \in K \backslash \{0\}$.

Ist $q = 1$, so ist $x_n = x_0$ für alle n, also $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$.

Ist $|q| > 1$, also $|q| = 1 + h$ mit $h > 0$, so ist $|x_n| \geq |x_0|(1 + nh)$ nach Bernoulli-Ungleichung, also ist x_n unbeschränkt und somit divergent. $\triangleleft$

Satz 16. *Ist $|q| < 1$, so gilt für jede natürliche Zahl k, dass*

$$n^k q^n \to 0 \ (n \to \infty).$$

Beweis. Es sei $l = k + 1$. Dann gibt es ein $h \in L_+$, so dass $h < \frac{1-|q|}{l}$, also $lh < 1 - |q|$. Nach der Bernoulli-Ungleichung gilt für alle n

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh > nh, \qquad (1 + h)^{-l} \geq 1 - lh > |q|.$$

Es folgt

$$|n^k q^n| < n^k (1 + h)^{-nl} = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{(1 + h)^n} \right)^l < \frac{1}{nh^l},$$

und die Behauptung folgt wie bei der harmonischen Folge. $\square$

Beispiel. Zur Untersuchung der Folge $x_n = \frac{b^n}{n!}$ für beliebiges $b \in K$ wählen wir eine natürliche Zahl m, so dass $m \geq 2|b|$. Dann gilt für $n \geq m$

$$|x_n| = \prod_{i=1}^{n} \frac{|b|}{i} = \prod_{i=1}^{m} \frac{|b|}{i} \prod_{i=m+1}^{n} \frac{|b|}{i} \leq \frac{|b|^m}{m!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-m} = \frac{(2|b|)^m}{m!} \left(\frac{1}{2} \right)^n,$$

und es folgt leicht

$$\frac{b^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty)$$

mit Hilfe von Satz 16 für $q = \frac{1}{2}$ und $k = 0$. $\triangleleft$

3.3 Rechenregeln für Grenzwerte

Aus konvergenten Folgen in einem Körper K mit Absolutbetrag kann man mit Hilfe der Rechenoperationen weitere konvergente Folgen bilden.

Satz 17. *Wenn $x_n \to a$ und $y_n \to b$ für $n \to \infty$, dann $x_n + y_n \to a + b$ und $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$ für $n \to \infty$.*

Beweis. Laut Dreiecksungleichung gilt für alle n

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|.$$

Wegen der Konvergenz von x_n und y_n gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen n_0 und n_1, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, während für $n \geq n_1$ gilt $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ folgt

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

und die Behauptung über die Summe ist bewiesen.

Für das Produkt bemerken wir, dass nach den Eigenschaften des Absolutbetrags gilt

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n(y_n - b) + (x_n - a)b| \\ &\leq |x_n(y_n - b)| + |(x_n - a)b| = |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|. \end{aligned}$$

Nach Satz 15 gibt es ein $c \in L_+$, so dass

$$|x_n| \leq c \quad \text{für alle } n, \qquad |b| \leq c,$$

also

$$|x_n y_n - ab| \leq c\big(|y_n - b| + |x_n - a|\big).$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es n_0' und n_1', so dass für $n \geq n_0'$ gilt $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2c}$, während für $n \geq n_1'$ gilt $y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2c}$. Also folgt für $n \geq \max\{n_0', n_1'\}$

$$|x_n y_n - ab| < \varepsilon. \qquad \square$$

Wir benötigen keine gesonderte Regel für $x_n - y_n = x_n + (-1) \cdot y_n$.

Satz 18. *Wenn $x_n \to a$ für $n \to \infty$ und $a \neq 0$, dann gibt es ein n_1, so dass $x_n \neq 0$ für $n \geq n_1$, und $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$ für $n \to \infty$.*

Beweis. Wegen der Konvergenz von x_n gibt es ein n_1, so dass für $n \geq n_1$ gilt $|x_n - a| < \frac{|a|}{2}$. Mit der Dreiecksungleichung folgt für diese n

$$|a| = |(a - x_n) + x_n| \leq |a - x_n| + |x_n| < \frac{|a|}{2} + |x_n|,$$

also $|x_n| > \frac{|a|}{2}$, insbesondere $x_n \neq 0$, und

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - x_n}{x_n a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|x_n||a|} < \frac{2}{|a|^2}|x_n - a|.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \frac{|a|^2}{2}\varepsilon$, und für $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ folgt

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Wir benötigen keine gesonderte Regel für $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$.

Die Sätze 17 und 18 kann man auch so formulieren: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n},$$

vorausgesetzt, die Ausdrücke auf der rechten Seite sind definiert.

Warnung. Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ folgt nicht $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a y_n)$, wie das Beispiel $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n$ zeigt.

Beispiel. Es sei

$$x_n = \frac{(3n+5)^2}{2n^2+1}.$$

Die Sätze 17 und 18 sind nicht unmittelbar anwendbar. Man kürze durch geeignete Potenz von n, so dass der Nenner einen von Null verschiedenen Grenzwert hat:

$$x_n = \frac{\left(\frac{3n+5}{n}\right)^2}{\frac{2n^2+1}{n^2}} = \frac{\left(3 + \frac{5}{n}\right)^2}{2 + \frac{1}{n^2}} \to \frac{(3+0)^2}{2+0^2} = \frac{9}{2} \qquad (n \to \infty). \qquad \triangleleft$$

Aus einer Folge x_n erhalten wir eine *Teilfolge*, indem wir beliebig viele Folgeglieder streichen, so dass unendlich viele verbleiben. Nummerieren wir die verbleibenden Indizes, so bilden diese eine streng monoton wachsende Folge n_k von natürlichen Zahlen, und die Teilfolge besteht aus den Gliedern x_{n_k}, die durch k nummeriert werden. Genaugenommen ist dies die Verkettung der Abbildungen[9] $n \mapsto x_n$ und $k \mapsto n_k$. Es ist klar, dass aus $x_n \to a$ für

[9] Das erste n bezeichnet eine Variable, das zweite n eine Folge.

$n \to \infty$ folgt, dass $x_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$.
Beispiel. Angenommen, die Folge in Satz 13 hat einen Grenzwert h. Wenden wir die obigen Sätze auf die Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

an, so folgt

$$h = \frac{1}{2}\left(h + \frac{a}{h}\right),$$

also $h^2 = \frac{1}{2}(h^2+a)$ und schließlich $h^2 = a$, das heißt, h ist eine Quadratwurzel aus a.

Ist aber $K = \mathbb{Q}$ und beispielsweise $a = 2$, so kann es eine solche rationale Zahl h nicht geben. Ist nämlich $h = \frac{m}{n}$ mit teilerfremden ganzen Zahlen m und n, so folgt $m^2 = 2n^2$, also m gerade, $m = 2l$. Dann ist aber $2l^2 = n^2$, also n gerade, was der Teilerfremdheit widerspricht.

Wir sehen also, dass in diesem Fall die Folge x_n aus dem Heronverfahren im Körper $\mathbb{Q}$ divergent ist. $\triangleleft$

4 Vollständigkeit

4.1 Reelle Zahlen

Wir wollen den Körper der rationalen Zahlen zu einem größeren Körper erweitern, in dem gewisse in $\mathbb{Q}$ divergente Folgen einen Grenzwert besitzen.

Definition 13. *Es sei K ein Körper mit Absolutbetrag mit Werten in einem angeordneten Körper L. Eine Folge*

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$$

in K heißt Cauchyfolge[10]*, wenn es für alle $\varepsilon \in L_+$ eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen m und n mit den Eigenschaften $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ gilt $|x_m - x_n| < \varepsilon$.*

Die Folgen, die im Heronverfahren auftreten, sind nach Satz 13 und 16 Cauchyfolgen.

Satz 19. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge, jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

[10] oder *Fundamentalfolge*

Beweis. Ist $x_n \to a \ (n \to \infty)$, so folgt die erste Behauptung leicht aus

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |a - x_n|.$$

Für die zweite Behauptung wählen wir $\varepsilon = 1$ in der Definition der Cauchyfolge und setzen

$$c = \max\{|x_0|, \dots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1\}.$$

Nun folgt die Behauptung wie im Beweis von Satz 15. □

Beispiel. Wir müssen bei der geometrischen Folge $x_n = x_0 q^n$ noch den Fall betrachten, dass $|q| = 1$, aber $q \neq 1$. Dann ist

$$|x_{n+1} - x_n| = |x_0||q - 1|$$

konstant, also ist die Folge keine Cauchyfolge und somit divergent. ◁

Definition 14. *Ein Körper K mit Absolutbetrag heißt* vollständig*, wenn jede Cauchyfolge konvergent ist.*

Wir wollen den unvollständigen Körper $\mathbb{Q}$ nun zu einem vollständigen Körper erweitern.

Satz 20. *Wir bezeichnen die Menge aller Folgen in $\mathbb{Q}$ mit $\mathcal{F}$, die Teilmenge der Cauchyfolgen mit $\mathcal{C}$ und die Teilmenge der Nullfolgen, d. h. der gegen Null konvergierenden Folgen, mit $\mathcal{N}$. Für gegebene Folgen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$ setzen wir*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots), \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= (x_0 \cdot y_0, x_1 \cdot y_1, \dots), \end{aligned}$$

Dann gilt folgendes.

(i) *$\mathcal{F}$ ist ein Ring, d. h. es hat alle Eigenschaften aus der Definition eines Körpers mit Ausnahme der Existenz von Quotienten. Die durch $x \mapsto \underline{x} = (x, x, \dots)$ gegebene Abbildung $\mathbb{Q} \to \mathcal{F}$ ist ein* Homomorphismus *von Ringen, d. h. für alle x und y in $\mathbb{Q}$ gilt*

$$\underline{x + y} = \underline{x} + \underline{y}, \qquad \underline{x \cdot y} = \underline{x} \cdot \underline{y}.$$

$\mathcal{F}$ hat das Nullelement $\underline{0}$ und Einselement $\underline{1}$.

(ii) *$\mathcal{C}$ ist ein Unterring in $\mathcal{F}$, d. h. er ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation und mit diesen Operationen ebenfalls ein Ring.*

(iii) $\mathcal{N}$ *ist ein Ideal in* $\mathcal{C}$*, d. h. ein Unterring mit der zusätzlichen Eigenschaft*

$$\mathbf{x} \in \mathcal{C} \;\wedge\; \mathbf{y} \in \mathcal{N} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathcal{N}.$$

(iv) *Für alle* $\mathbf{x} \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$ *gibt es ein* $\mathbf{z} \in \mathcal{C}$*, so dass* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} - \underline{1} \in \mathcal{N}$*.*

Beweis. Der Beweis von Aussage (i) ist leicht und wird den Teilnehmern selbst überlassen. Der Beweis von (ii) und (iii) ist ähnlich wie der von Satz 17, wobei an Stelle von Satz 15 hier Satz 19 anzuwenden ist. Man benutzt dabei die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| &\le |x_m - x_n| + |y_m - y_n|, \\ |x_m \cdot y_m - x_n \cdot y_n| &\le |x_m||y_m - y_n| + |x_m - x_n||y_n|. \end{aligned}$$

Nun zu Aussage (iv). Es sei $\mathbf{x} \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$. Wegen $\mathbf{x} \notin \mathcal{N}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle n_0 ein n existiert, so dass $n \ge n_0$ und $|x_n| \ge \varepsilon$. Wegen $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ gibt es ein n_1, so dass für alle m und n mit den Eigenschaften $m \ge n_1$ und $n \ge n_1$ gilt $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Setze nun $m_0 = \max\{n_0, n_1\}$. Dann gilt für $n \ge m_0$

$$\varepsilon \le |x_{m_0}| \le |x_{m_0} - x_n| + |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + |x_n|,$$

also $|x_n| > \frac{\varepsilon}{2}$.

Wir setzen

$$z_n = \begin{cases} 1/x_n, & \text{wenn } x_n \ne 0, \\ 1, & \text{wenn } x_n = 0. \end{cases}$$

Dann ist $\mathbf{z} \in \mathcal{C}$, denn für $m \ge m_0$ und $n \ge m_0$ gilt ähnlich zum Beweis von Satz 18

$$|z_m - z_n| \le \frac{|x_n - x_m|}{|x_m||x_n|} < \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 |x_n - x_m|.$$

Außerdem ist $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} - \underline{1} \in \mathcal{N}$, denn nur endlich viele Glieder dieser Folge sind von von Null verschieden. □

Aus Aussage (iii) erhalten wir

Folgerung 3. *Die durch*

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}, \quad \textit{wenn} \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathcal{N}$$

definierte Relation auf $\mathcal{C}$ *ist eine Äquivalenzrelation. Es gilt*

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \;\wedge\; \mathbf{y} \sim \mathbf{y}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \sim \mathbf{x}' + \mathbf{y}' \;\wedge\; \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \sim \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}'.$$

Damit ist folgende Definition gerechtfertigt.

Definition 15. *Die Äquivalenzklassen* $[\mathbf{x}]$ *von Folgen* $\mathbf{x}$ *in* $\mathcal{C}$ *nennen wir reelle Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen bezeichnen wir mit* $\mathbb{R}$. *Wir definieren*

$$[\mathbf{x}] + [\mathbf{y}] = [\mathbf{x} + \mathbf{y}], \qquad [\mathbf{x}] \cdot [\mathbf{y}] = [\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}].$$

Satz 21. *Die Menge der rellen Zahlen mit den Operationen Addition und Multiplikation ist ein Körper. Die durch* $x \mapsto [\underline{x}]$ *gegebene Abbildung* $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *ist ein injektiver Homomorphismus.*

Beweis. Aus Satz 20(ii) und (iv) folgt die Gültigkeit der Körperaxiome (i)-(iii) und (iv) (siehe Definition 7). Aus Satz 20(i) folgt auch, dass die natürliche Abbildung $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ein Homomorphismus ist. Die Injektivität folgt z. B. aus Satz 14. $\square$

Wir wollen auch eine Anordnung auf $\mathbb{R}$ definieren.

Satz 22. *In den Bezeichnungen von Satz 20 bezeichnen wir mit* $\mathcal{C}_+$ *die Menge aller Folgen* $\mathbf{x}$ *in* $\mathcal{C}$ *mit folgender Eigenschaft: Es existiert ein* $\varepsilon > 0$ *und ein* n_0, *so dass für alle* n *mit der Eigenschaft* $n \geq n_0$ *gilt* $x_n \geq \varepsilon$. *Dann gilt Folgendes.*

(i) *Ist* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_+$ *und* $\mathbf{y} \in \mathcal{N}$, *so ist* $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{C}_+$.

(ii) *Für eine rationale Zahl* x *gilt genau dann* $\underline{x} \in \mathcal{C}_+$, *wenn* $x \in \mathbb{Q}_+$.

(iii) $\mathcal{C}_+$ *ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation.*

(iv) *Für jede Folge* $\mathbf{x}$ *in* $\mathcal{C}$ *gilt genau eine der Aussagen* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_+$, $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$, $-\mathbf{x} \in \mathcal{C}_+$.

(v) *Ist* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ *und* $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$, *so gibt es ein* n_0, *so dass für* $n \geq n_0$ *gilt* $\mathbf{x} - \underline{x_n} + \underline{\varepsilon} \in \mathcal{C}_+$.

(vi) *Für jede Folge* $\mathbf{x}$ *in* $\mathcal{C}$ *gibt es eine natürliche Zahl* m, *so dass für alle* n *gilt* $|x_n| \leq m$.

Beweis. Die einfachen Beweise der Behauptungen (i), (ii) und (iii) werden den Teilnehmern überlassen.

Es ist klar, dass die drei Aussagen in (iv) einander ausschließen. Damit bleibt zu zeigen, dass für jede Folge $\mathbf{x}$ in $\mathcal{C}$ wenigstens eine davon gilt.

Angenommen, $\mathbf{x} \notin \mathcal{N}$. Wie wir im Beweis von Satz 20(iv) gesehen haben, gibt es dann ein $\varepsilon > 0$ und ein m_0, so dass für $n \geq m_0$ gilt $|x_n| > \frac{\varepsilon}{2}$. Wegen $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ gibt es ein n_0, so dass für $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ gilt $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Die

Zahlen x_n mit $n \geq \max\{m_0, n_0\}$ können also keine verschiedenen Vorzeichen haben. Sind alle positiv, so ist $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_+$, sind alle negativ, so ist $-\mathbf{x} \in \mathcal{C}_+$.

Ist $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ und $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$, so gibt es ein n_0, so dass für $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ gilt $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, also $x_m - x_n + \varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}$, woraus Aussage (v) folgt.

Aussage (vi) folgt aus Satz 19 und der Tatsache, dass der Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ archimedisch ist. $\square$

Wegen Satz 22(i) ist die folgende Definition korrekt.

Definition 16. *Die Menge aller Äquivalenzklassen* $[\mathbf{x}]$ *mit der Eigenschaft* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_+$ *bezeichnen wir mit* $\mathbb{R}_+$.

Aus Satz 22(ii)-(vi) erhalten wir:

Folgerung 4. *Die Menge* $\mathbb{R}_+$ *definiert eine archimedische Anordnung auf* $\mathbb{R}$. *Für* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ *konvergiert die Folge* $[\underline{x_n}]$ *in* $\mathbb{R}$ *gegen* $[\mathbf{x}]$. *Für eine rationale Zahl* x *gilt genau dann* $x \in \mathbb{Q}_+$, *wenn* $[\underline{x}] \in \mathbb{R}_+$.

Die letzten Aussagen von Satz 21 und Folgerung 4 erlauben uns, jede rationale Zahl x mit ihrem Bild $[\underline{x}]$ zu identifizieren, so dass $\mathbb{Q}$ zu einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ wird.

Satz 23. *Der Körper* $\mathbb{R}$ *ist vollständig bezüglich des Absolutbetrags, der zur Anordnung gehört.*

Beweis. Es sei $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Da jedes Glied Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen ist, finden wir rationale Zahlen x_n, so dass $|u_n - x_n| < \frac{1}{n}$. Wir behaupten, dass $\mathbf{x}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist. Ist nämlich $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$, so gibt es ein n_0, so dass für $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ gilt $|u_m - u_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Wählen wir $n_1 \geq \frac{3}{\varepsilon}$ und $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, so gilt für $m \geq n_2$ und $n \geq n_2$

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - u_m| + |u_m - u_n| + |u_n - x_n| < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon.$$

Nach Folgerung 4 konvergiert die Cauchyfolge $\mathbf{x}$ gegen die reelle Zahl $[\mathbf{x}]$, und $\mathbf{u} - \mathbf{x}$ ist eine Nullfolge in $\mathbb{R}$, also konvergiert auch $\mathbf{u}$ gegen $[\mathbf{x}]$. $\square$

Beispiel. Die Folgen im Heronverfahren konvergieren nach Satz 23 gegen reelle Zahlen, wobei jetzt auch reelle Zahlen a betrachtet werden können. Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl a gibt es also eine reelle Zahl h, so dass $h^2 = a$, wobei wir von den Zahlen h und $-h$ die nichtnegative wählen können. Wegen der Monotonie der Quadratfunktion ist diese Zahl h eindeutig bestimmt und heißt *Quadratwurzel* aus a, abgekürzt $\sqrt{a}$. Außerdem folgt, dass auch die Quadratwurzelfunktion streng monoton wachsend ist.

Damit gewinnen wir aus Aufgabe 9 für $0 < x \leq y$ die Ungleichung

$$x \leq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y,$$

die besagt, dass das *harmonische Mittel* zweier positiver Zahlen x und y kleiner oder gleich dem *geometrischen Mittel* und dieses wiederum kleiner oder gleich dem *arithmetischen Mittel* ist, wobei Gleichheit jeweils nur dann eintritt, wenn $x = y$ ist. $\triangleleft$

4.2 Schranken und Grenzen

In technischen Anwendungen sind oft Schranken für zulässige Werte vorgegeben.

Definition 17. *Es sei M eine Teilmenge eines angeordneten Körpers K. Ein Element a von K heißt* obere Schranke *von M, wenn für alle Elemente x von M gilt $x \leq a$. Besitzt M eine obere Schranke, so sagt man, die Menge M sei* von oben beschränkt*.*

Analog definiert man untere Schranken *und* von unten beschränkte *Mengen.*

Diese Begriffe werden auch auf Folgen und Funktionen angewendet und beziehen sich dann auf die Menge der Glieder bzw. den Wertebereich.

Beispiel. Wir betrachten die Folge der Zahlen $x_n = n^k q^n$, wobei $q \in \mathbb{R}_+$ und $k \in \mathbb{N}$. Diese hat die untere Schranke 0. Für $q > 1$ ist die Folge nicht von oben beschränkt. $0 < q < 1$ ist sie nach Satz 15 und 16 von oben beschränkt, und eine einfache Abwandlung des Beweises von Satz 16 zeigt, dass für jede positive Zahl h mit der Eigenschaft $h < \frac{1-q}{k}$ die Zahl h^{-k} eine obere Schranke ist. Wegen der Monotonie der Potenzfunktion erhalten wir eine um so kleinere obere Schranke, je größer wir h wählen. $\triangleleft$

Definition 18. *Gibt es unter allen oberen Schranken einer Menge M eine kleinste, so heißt sie* obere Grenze *oder* Supremum *von M, abgekürzt* $\sup M$*. Analog definiert man die* untere Grenze *oder das* Infimum*, abgekürzt* $\inf M$*, als größte untere Schranke.*

So ist z. B. $\inf K_+ = 0$. Hat eine Menge M ein größtes Element, so ist dieses auch ihr Supremum.

Beispiel. Wir betrachten die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\}$. Ist x_0 eine obere Schranke, so ist $x_0^2 > 2$, weil Gleichheit nicht eintreten kann, und dann ist die Zahl $y_0 = \frac{2}{x_0}$ in M. Umgekehrt ist für jedes $y_0 \in M$ die Zahl $x_0 = \frac{2}{y_0}$ eine obere Schranke. Das Heronverfahren liefert uns eine kleinere obere Schranke

x_1 und ein größeres Element y_1 von M. Also hat M kein größtes Element und keine obere Grenze in $\mathbb{Q}$. $\triangleleft$

Satz 24. *Jede von oben beschränkte nichtleere Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *hat eine obere Grenze in* $\mathbb{R}$*, jede von unten beschränkte nichtleere Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *hat eine untere Grenze in* $\mathbb{R}$.

Beweis. Die Menge M sei nicht leer und von oben beschränkt. Dann gibt es ein Element y_0 in M und eine obere Schranke x_0, und wir betrachten das arithmetische Mittel m_0 von x_0 und y_0. Ist m_0 eine obere Schranke von M, so setzen wir $x_1 = m_0$ und $y_1 = y_0$. Andernfalls gibt es ein Element y_1 von M, so dass $y_1 > m_0$, und wir setzen $x_1 = x_0$. In beiden Fällen ist $y_0 \leq y_1 \leq x_1 \leq x_0$ und $x_1 - y_1 \leq \frac{1}{2}(x_0 - y_0)$.

Schreiten wir so fort, erhalten wir eine monoton wachsende Folge von Elementen y_n von M und eine monoton fallende Folge von oberen Schranken x_n von M, und durch vollständige Induktion zeigt man, dass für alle n gilt

$$x_n - y_n \leq 2^{-n}(x_0 - y_0).$$

Für $m \geq n$ ist $|x_m - x_n| \leq |x_n - y_n|$, also ist x_n eine Cauchyfolge. Nach Satz 23 hat sie einen Grenzwert b. Außerdem ist $x_n - y_n$ eine Nullfolge, also konvergiert auch y_n gegen b. Wir behaupten, dass $b = \sup M$.

Angenommen, es gibt ein Element y von M, so dass $y > b$. Dann gibt es wegen $y - b > 0$ ein n, so dass $|x_n - b| < y - b$, insbesondere $x_n - b < y - b$, also $x_n < y$ im Widerspruch dazu, dass x_n eine obere Schranke ist. Also war unsere Annahme falsch, und b ist eine obere Schranke von M.

Angenommen, es gibt eine obere Schranke x von M, so dass $x < b$. Dann gibt es wegen $b - x > 0$ ein n, so dass $|y_n - b| < b - x$, insbesondere $b - y_n < b - x$, also $y_n > x$ im Widerspruch zu $y_n \in M$. Also war unsere Annahme falsch, und b ist die kleinste obere Schranke von M. $\square$

Folgerung 5. *Jedes (von oben und unten) beschränkte Intervall in* $\mathbb{R}$ *hat eine der Formen*

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \qquad [a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$
$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \qquad]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Für den Körper $\mathbb{Q}$ wäre diese Aussage falsch, wie das obige Beispiel $\{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\}$ zeigt.

Eine Folge von Intervallen $[y_n, x_n]$ heißt *Intervallschachtelung*, wenn für alle n gilt

$$[y_{n+1}, x_{n+1}] \subseteq [y_n, x_n]$$

und wenn $x_n - y_n \to 0$ $(n \to \infty)$. In diesem Fall hat der Durchschnitt aller Intervalle genau ein Element. Ein Beispiel haben wir im vorigen Beweis kennengelernt.

Satz 25. *Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ und jede reelle Zahl $c \geq 0$ existiert eine reelle Zahl $a \geq 0$, so dass $a^k = c$.*

Die Potenzfunktion mit dem Exponenten k auf $\mathbb{R}_+$ ist streng monoton wachsend (vgl. Präsenzaufgabe 9), also kann es höchstens ein solches a geben. Wir nennen es die $k$te *Wurzel* aus c, abgekürzt $\sqrt[k]{c}$.

Beweis. Es genügt, den Fall $c > 0$ zu betrachten. Es sei $A = \{x > 0 \mid x^k < c\}$, $B = \{x > 0 \mid x^k > c\}$. Beide Mengen sind nicht leer, denn wegen $k \geq 1$ ist $\min\{1, c\} \in A$ und $\max\{1, c\} \in B$. Wegen der Monotonie der Potenzfunktion ist jedes Element von A eine untere Schranke von B und jedes Element von B eine obere Schranke von A. Also existieren $a = \sup A$ und $b = \inf B$, und $a > 0$, $b > 0$.

Wir behaupten, dass A kein größtes Element hat, woraus folgt, dass $a \notin A$ und $b \notin A$. Ist nämlich $x \in A$ und $y \in B$, so gilt für $x < u \leq y$

$$u^k - x^k = (u - x)(u^{k-1} + u^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}) \leq (k-1)y^{k-1}(u - x),$$

und für $u - x < \frac{c - x^k}{(k-1)y^{k-1}}$ folgt $u^k - x^k < c - x^k$, also $u \in A$. Ähnlich beweist man, dass B kein kleinstes Element hat, also $b \notin B$ und $a \notin B$. Laut Definition von A und B ist $a^k = b^k = c$ (und wegen der strengen Monotonie ist $a = b$). □

Folgerung 6. *Für beliebige positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ gilt*

$$\frac{k}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[k]{a_1 \ldots a_k} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_k}{k},$$

d. h. das harmonische Mittel ist kleiner oder gleich dem geometrischen Mittel und dieses wiederum kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel.

Bezeichnen wir nämlich das geometrische Mittel mit g, so gilt

$$\frac{a_1}{g} \cdots \frac{a_k}{g} = 1,$$

und aus Satz 11 folgt

$$\frac{a_1}{g} + \ldots + \frac{a_k}{g} \geq k.$$

Daraus folgt die rechte Ungleichung. Ersetzen wir jede Zahl a_i durch ihren Kehrwert, so folgt die linke Ungleichung.

Definition 19. *Für alle $x \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ setzen wir*

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Die Korrektheit dieser Definition und die Potenzgesetze für rationale Exponenten sind Inhalt der Übungsaufgabe 24. Den Spezialfall

$$\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

benötigt man genaugenommen schon in der obigen Folgerung.

Folgerung 7. *Für jede natürliche Zahl k gilt*

$$\sqrt[n]{n^k} \to 1 \;\; (n \to \infty).$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist ja $n^k(1+\varepsilon)^{-n} \to 0$ $(n \to \infty)$ nach Satz 16, also existiert ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt $n^k(1+\varepsilon)^{-n} < 1$. Letzteres ist wegen der Monotonie äquivalent zu $\sqrt[n]{n^k} < 1+\varepsilon$, und aus dem selben Grund gilt $\sqrt[n]{n^k} \geq 1 > 1-\varepsilon$.

Bemerkung. Die Konstruktion von $\mathbb{R}$ mit Hilfe von Cauchyfolgen ist für beliebige Körper mit Absolutbetag anwendbar und liefert die sogenannte Vervollständigung des Körpers. Im Fall von angeordneten Körpern gibt es einen weiteren Vollständigkeitsbegriff, nämlich die Existenz von Grenzen für beliebige beschränkte Mengen. Hier kann man eine Vervollständigung als Menge aller Dedekindschen Schnitte konstruieren: Ein Dedekindscher Schnitt ist ein Paar von nichtleeren Teilmengen (A, B), so dass B die Menge der oberen Schranken von A ist, während A die Menge der unteren Schranken von B ist. Wir erhalten ein Beispiel, wenn wir zur oben betrachteten Menge A alle nichtpositiven Zahlen hinzufügen.

Beide Methoden der Vervollständigung liefern bei Anwendung auf $\mathbb{Q}$ isomorphe Körper. Man kann zeigen, dass es zwischen zwei beliebigen vollständigen archimedisch angeordneten Körpern genau einen *Isomorphismus* (d. h. umkehrbaren Homomorphismus) gibt. In diesem Sinne ist der Körper $\mathbb{R}$ eindeutig charakterisiert.

4.3 Grenzwerte und Ungleichungen

In einem angeordneten Körper gelten für Grenzwerte neben den Regeln aus Abschnitt 3.3 weitere Gesetzmäßigkeiten.

Satz 26. *Ist $x_n \to a$ und $y_n \to b$ für $n \to \infty$ und gilt $x_n \leq y_n$ für alle (genügend großen) n, so gilt $a \leq b$.*

Warnung: $\leq$ ist nicht durch $<$ ersetzbar!

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \varepsilon$ und $|y_n - b| < \varepsilon$, also

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n < b + \varepsilon, \qquad a - b < 2\varepsilon.$$

Wäre $a > b$, so ergäbe sich mit $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ ein Widerspruch. □

Satz 27 (Einschließungskriterium)**.** *Ist $x_n \to a$ und $z_n \to a$ für $n \to \infty$ und gilt $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle (genügend großen) n, so ist $y_n \to a$ für $n \to \infty$.*

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \varepsilon$ und $|z_n - a| < \varepsilon$, also

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon, \qquad |y_n - a| < \varepsilon.$$ □

Beispiel. Ist $c \geq 1$, so gilt $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$ für genügend große n, und mit Folgerung 7 ergibt sich

$$\sqrt[n]{c} \to 1 \ \ (n \to \infty).$$

Mit Satz 18 und einem Potenzgesetz folgt das auch für $0 < c \leq 1$. ◁

Beispiel. Für $p \geq q \geq 0$ gilt

$$\sqrt[n]{p^n} \leq \sqrt[n]{p^n + q^n} \leq \sqrt[n]{p^n + p^n},$$

und es folgt

$$\sqrt[n]{p^n + q^n} \to p \ \ (n \to \infty)$$

mit Hilfe des vorigen Beispiels für $c = 2$. ◁

Satz 28 (Monotoniekriterium)**.** *Jede beschränkte monotone Folge reeller Zahlen ist konvergent in $\mathbb{R}$.*

Dies wäre im Körper $\mathbb{Q}$ falsch! (Vgl. Satz 13 für $a = 2$.)

Beweis. Wir betrachten o.B.d.A. den Fall monotonen Wachstums. Wegen der Beschränktheit existiert $a = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach Satz 25. Ist $\varepsilon > 0$, so kann $a - \varepsilon$ keine obere Schranke sein, also gibt es ein n_0, so dass $x_{n_0} > a - \varepsilon$. Aus der Monotonie folgt $x_n > a - \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Da a obere Schranke ist, gilt $x_n \leq a < a + \varepsilon$. □

Als Anwendung untersuchen wir das Wachstum eines Anfangskapitals a bei einem nominalen Zinssatz x. Nach einem Jahr beträgt das Guthaben (unter Vernachlässigung von Bearbeitungsgebühren)

$$\begin{array}{ll} (1+x)a & \text{bei jährlicher Verzinsung} \\ \left(1+\frac{x}{12}\right)^{12} a & \text{bei monatlicher Verzinsung} \\ \left(1+\frac{x}{365}\right)^{365} a & \text{bei täglicher Verzinsung} \\ \quad\dots & \end{array}$$

Steigt die Auszahlung bei häufigerer Verzinsung? Kann sie ins Unermessliche steigen?

Satz 29. *Für alle reellen Zahlen x existiert der Grenzwert*

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\exp x > 0$, $\exp x \geq 1 + x$,

(ii) *wenn $x \leq y$, dann $\exp x \leq \exp y$,*

(iii) $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$.

Beweis. Zunächst halten wir x fest und setzen für $n > 0$

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Behauptung 1: Für $n > -x$ ist die Folge a_n monoton wachsend.

Dazu genügt es wegen $a_n > 0$ zu zeigen, dass $a_{n+1}/a_n \geq 1$. Es gilt

$$\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} = 1 + \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} = 1 + \frac{x}{x+n}\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x}{x+n}.$$

Für $n > -x$ ist $\frac{x}{x+n} < 1$, also nach Bernoulli

$$\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{x}{x+n}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{x}{x+n} = \frac{1}{1+\frac{x}{n}}.$$

Behauptung 2: Ist $x \in \mathbb{Z}$, so ist für $n > -x$

$$a_n \leq b_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x},$$

und die Folge b_n ist monoton fallend.

Es folgt nämlich aus Monotonie der Potenzfunktion (Fallunterscheidung $x \geq 0$, $x \leq 0$)

$$\frac{b_n}{a_n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^x \geq 1^x = 1.$$

Zum Beweis von $b_n/b_{n+1} \geq 1$ benutzen wir die obige Rechnung und die Bernoulli-Ungleichung:

$$\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n+1}}\right)^{n+x} = \left(1 - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x}{x+n}\right)^{-(x+n)} \geq 1 + \frac{x}{n+1}.$$

Behauptung 3: a_n ist beschränkt, also nach Satz 28 konvergent. (Wegen $a_1 = 1 + x$ folgt dann (i) aus Behauptung 1 und Satz 26.)

Für $x \in \mathbb{Z}$ ist jedes b_n mit $n > -x$ obere Schranke. Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ ist

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n,$$

sobald $n > \max\{-x, -y\}$. Wählen wir $y \in \mathbb{Z}$, so folgt Beschränktheit für x. Mit Satz 26 folgt (ii).

Behauptung 4: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^n = 1.$$

Ist nämlich $0 < c < \exp x < C$, so gilt für große m

$$c \leq \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \leq C.$$

Ersetzen wir m durch n^2 und wenden die (monotone) Wurzelfunktion an, so ergibt sich

$$\sqrt[n]{c} \leq \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^n \leq \sqrt[n]{C},$$

und die Behauptung folgt aus dem Einschließungskriterium.

Zum Beweis von (iii) beachte man, dass

$$\frac{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}{1+\frac{x+y}{n}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{x+y}{n}} \cdot \frac{xy}{n^2}.$$

Für alle $n \geq 2|x+y|$ gilt $1 + \frac{x+y}{n} \geq \frac{1}{2}$, also

$$1 - \frac{2|xy|}{n^2} \leq \frac{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}{1+\frac{x+y}{n}} \leq 1 + \frac{2|xy|}{n^2}.$$

Für große n sind alle Terme positiv, und die Ungleichungen gelten auch für die $n$ten Potenzen. Mit dem Einschließungskriterium folgt (iii) aus Behauptung 4. □

Folgerung 8. *Für $x < 1$ gilt*

$$\exp x \leq \frac{1}{1-x}.$$

Dies folgt aus (iii) für $y = -x$ und aus (i).

Folgerung 9. *Für alle reellen Zahlen x und alle rationalen Zahlen r gilt*

$$\exp rx = (\exp x)^r.$$

Dies folgt aus (iii) für $r = -1$ und (durch vollständige Induktion) für alle $r \in \mathbb{N}$, also gilt es für $r \in \mathbb{Z}$. Für beliebige $r = \frac{m}{n}$ folgt es aus

$$\left(\exp \frac{m}{n} x\right)^n = \exp mx = (\exp x)^m.$$

Definition 20. *Die Funktion* exp *wird* Exponentialfunktion *genannt, die Zahl $e = \exp 1$ heißt* Eulersche Zahl*.*

Für $r \in \mathbb{Q}$ ist also $\exp r = e^r$. Man schreibt $\exp x$ auch im Fall von irrationalen Zahlen oft als e^x.

Folgerung 10. *Die Funktion* exp *ist streng monoton wachsend.*

Sie ist monoton wachsend nach (ii), und gäbe es reelle Zahlen $x < y$, so dass $\exp x = \exp y$, so wäre nach (iii) dann $\exp(y - x) = 1$, aber dies widerspräche Eigenschaft (i).

4.4 Komplexe Zahlen

In einem angeordneten Körper haben manche quadratische Gleichungen keine Lösung, z. B.

$$z^2 + 1 = 0. \tag{2}$$

Wir nehmen einmal an, dass es einen Körper gibt, der $\mathbb{R}$ als Teilkörper enthält und in dem die Gleichung (2) eine Lösung i besitzt. Dann gilt für alle reellen Zahlen x, y, u und v

$$\begin{aligned}(u + iv) + (x + iy) &= (u + x) + i(v + y),\\ (u + iv) \cdot (x + iy) &= (ux - vy) + i(uy + vx).\end{aligned}$$

Die Teilmenge aller Elemente der Form $x + iy$ ist also abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Könnte man ein Element auf zwei Arten darstellen, z. B.

$$u + iv = x + iy,$$

so wäre $u - x = i(y - v)$, also

$$(u - x)^2 = -(v - y)^2$$

und somit $u = x$ und $v = y$. In dem Erweiterungskörper hat für gegebene u und v die Gleichung

$$(u + iv) + (x + iy) = 0$$

eine Lösung, nämlich $x = -u$, $y = -v$, und für $u + iv \neq 0$ hat auch die Gleichung

$$(u + iv) \cdot (x + iy) = 1$$

eine Lösung. Sie ist ja äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ux - vy &= 1, \\ uy + vx &= 0, \end{aligned}$$

und man findet leicht

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \qquad y = \frac{-v}{u^2 + v^2},$$

wobei $u^2 + v^2 > 0$, weil nach Voraussetzung u und v nicht beide gleich Null sind. Es folgt, dass die Teilmenge der Elemente der Form $x + iy$ bereits einen Körper bildet, in dem die obige quadratische Gleichung lösbar ist, und dass die Abbildung $(x, y) \mapsto x + iy$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf diesen Teilkörper bijektiv ist.

All dies beruhte auf einer unbewiesenen Annahme, aber es zeigt, wie wir den fraglichen Körper konstruieren können.

Definition 21. *Es sei $\mathbb{C}$ die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen mit den Operationen*

$$\begin{aligned} (u, v) + (x, y) &= (u + x, v + y), \\ (u, v) \cdot (x, y) &= (ux - vy, uy + vx). \end{aligned}$$

Satz 30. *Die Menge $\mathbb{C}$ mit diesen Operationen ist ein Körper mit dem Nullelement* $(0, 0)$ *und dem Einselement* $(1, 0)$.

Beweis. Wir führen die Nachprüfung der Körperaxiome nur am Beispiel des Assoziativgesetzes der Multiplikation vor:

$$\begin{aligned} (s, t) \cdot \big((u, v) \cdot (x, y)\big) &= (s, t) \cdot (ux - vy, uy + vx) \\ &= \big(s(ux - vy) - t(uy + vx), s(uy + vx) + t(ux - vy)\big), \\ \big((s, t) \cdot (u, v)\big) \cdot (x, y) &= (su - tv, sv + tu) \cdot (x, y) \\ &= \big((su - tv)x - (sv + tu)y, (su - tv)y + (sv + tu)x\big). \end{aligned}$$

Die geordneten Paare auf der rechten Seite stimmen überein.

Die motivierenden Betrachtungen vor der Definition lassen sich in die Sprache geordneter Paare umformulieren und zeigen die Existenz der entgegengesetzten Zahl und des Kehrwertes, woraus die Existenz der Differenz und des Quotienten folgt. □

Wir nennen die Elemente des Körpers $\mathbb{C}$ *komplexe Zahlen*. Die durch $x \mapsto (x, 0)$ gegebene Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist ein injektiver Homomorphismus. Wir identifizieren darum $\mathbb{R}$ mit dem Wertebereich dieser Abbildung. Das Element $(0, 1)$ ist eine Lösung der Gleichung 2. Wir bezeichnen es mit i und nennen es *imaginäre Einheit*. Die eingangs gemachte Annahme ist jetzt vollständig realisiert. Man veranschaulicht komplexe Zahlen z als Punkte mit Koordinaten $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ in einer Ebene (benannt nach Gauß oder Argand).

Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig in der Form $z = x + iy$ schreiben, und wir werden die Schreibweise als Paar nicht mehr benutzen. Man bezeichnet x als den *Realteil* und y als den *Imaginärteil* von z, abgekürzt $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$, und mann nennt $\bar{z} = x - iy$ die zu z *konjugierte Zahl*.

Satz 31. *Die einzigen* Automorphismen *des Körpers* $\mathbb{C}$ *(d. h. Isomorphismen* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$*), die alle Elemente von* $\mathbb{R}$ *fest lassen, sind die identische Abbildung und die Konjugation.*

Durch die Festlegung

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

wird ein normierter archimedischer Absolutbetrag auf dem Körper $\mathbb{C}$ *definiert, dessen Einschränkung auf* $\mathbb{R}$ *mit dem üblichen Absolutbetrag übereinstimmt.*

Beweis. Gleichung 2 nimmt jetzt die Form

$$(z + i)(z - i) = 0$$

an, sie hat folglich nur die Lösungen i und $-i$. Ein Automorphismus f muss eine Lösung auf eine Lösung abbilden, also ist $f(i) = i$ oder $f(i) = -i$. Es gibt also nur die genannten Möglichkeiten, und man rechnet leicht nach, dass diese tatsächlich Automorphismen sind.

Wir prüfen die Eigenschaften eines Absolutbetrags nach. Für $z = x + iy$ ist $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$, wobei Gleichheit nur für $x = y = 0$ eintritt. Also ist $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ korrekt definiert und hat Eigenschaft (i) aus Definition 10. Für $y = 0$ erhalten wir den reellen Absolutbetrag $\sqrt{x^2} = |x|$. Eigenschaft (ii), nämlich

$$|zw| = |z||w|$$

folgt für alle komplexen Zahlen z und w aus den Potenzgesetzen und der Tatsache, dass die Konjugation ein Automorphismus ist.

Ist z rein imaginär, d. h. $\operatorname{Re} z = 0$, so ist z^2 reell und nicht positiv. Wegen $\operatorname{Re}(z\bar{w} - w\bar{z}) = \operatorname{Re} z\bar{w} - \operatorname{Re} \overline{z\bar{w}} = 0$ folgt also

$$(z\bar{w} - w\bar{z})^2 \leq 0.$$

Addieren wir $4z\bar{z}w\bar{w}$, so erhalten wir

$$(z\bar{w} + w\bar{z})^2 \leq 4|z|^2|w|^2.$$

Wegen $\operatorname{Im}(z\bar{w} + w\bar{z}) = \operatorname{Im} z\bar{w} + \operatorname{Im} \overline{z\bar{w}} = 0$ steht links das Quadrat einer reellen Zahl, und mit der Monotonie der Wurzelfunktion ist

$$|z\bar{w} + w\bar{z}| \leq 2|z||w|.$$

(Dies ist ein Spezialfall der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.) Es folgt

$$(z + w)\overline{(z + w)} = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2.$$

Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion folgt schließlich die Dreiecksungleichung

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Die Normiertheit und die archimedische Eigenschaft der Absolutbetrages übertragen sich von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$. □

Wegen Satz 31 sind die Definitionen von Grenzwerten und Cauchyfolgen in $\mathbb{C}$ anwendbar. So gilt z. B. $z_n \to c$ $(n \to \infty)$, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein n_0 gibt, so dass alle Glieder z_n mit einem Index $n \geq n_0$ in der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < \varepsilon\}$, genannt ε-Umgebung von c, liegen. Diese erscheint in der Gaußschen Zahlenebene als Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius ε.

Satz 32. (i) *Für eine komplexe Zahl c gilt genau dann*

$$z_n \to c \ \ (n \to \infty),$$

wenn

$$\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} c \quad \wedge \quad \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} c \ \ (n \to \infty).$$

(ii) *Eine Folge komplexer Zahlen z_n ist genau dann eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, wenn die Folgen $\operatorname{Re} z_n$ und $\operatorname{Im} z_n$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind.*

(iii) *Der Körper der komplexen Zahlen ist vollständig.*

Beweis. Nach Monotonie der Quadratwurzelfunktion gilt

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \qquad |\operatorname{Im} z| \leq |z|,$$

und nach Dreiecksungleichung gilt

$$|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

Hieraus folgen leicht die Aussagen (i) und (ii), und aus diesen folgt (iii). □

5 Erweiterungen des Grenzwertbegriffs

Über manche divergenten Folgen kann man Genaueres aussagen.

5.1 Uneigentliche Grenzen und Grenzwerte

Es sei K ein angeordneter Körper. Wir betrachten Objekte ∞ und $-\infty$, die keine Elemente von K sind, und erweitern die Kleiner-Relation von K auf die Menge $\bar{K} = K \cup \{-\infty, \infty\}$ durch die Festlegung $-\infty < x < \infty$ für alle Elemente x von K.

Definition 22. *Ist eine Teilmenge M von K nicht von oben beschränkt, so setzen wir $\sup M = \infty$, ist sie nicht von unten beschränkt, so setzen wir $\inf M = -\infty$. Wir setzen auch $\sup \varnothing = -\infty$ und $\inf \varnothing = \infty$.*

Nun sind Supremum und Infimum für jede Teilmenge von K definiert.

Definition 23. *Wir sagen, dass eine Folge x_n in $\bar{K}$ gegen ∞ divergiert, abgekürzt $x_n \to \infty \ (n \to \infty)$, wenn es für jedes Element c von K ein n_0 gibt, so dass für alle n mit der Eigenschaft $n \geq n_0$ gilt $x_n > c$.*

Analog definiert man, wann $x_n \to -\infty \ (n \to \infty)$.

In diesen Fällen nennt man ∞ bzw. $-\infty$ den uneigentlichen Grenzwert *der Folge und bezeichnet ihn ebenfalls mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Satz 33. *Gegeben sei eine Folge x_n in K.*

(i) *Wenn $x_n \to \infty \ (n \to \infty)$ und ein $a \in K$ existiert, so dass $y_n \geq a$ für alle n, dann ist $x_n + y_n \to \infty \ (n \to \infty)$.*

(ii) *Wenn $x_n \to \infty \ (n \to \infty)$ und ein $a \in K_+$ existiert, so dass $y_n \geq a$ für alle n, dann ist $x_n \cdot y_n \to \infty \ (n \to \infty)$.*

(iii) *Es gilt genau dann $x_n \to \infty \ (n \to \infty)$, wenn für genügend große n gilt $x_n > 0$ und wenn $\frac{1}{x_n} \to 0 \ (n \to \infty)$.*

Beweis. Wir führen ihn nur für (iii) vor. Angenommen, $x_n \to \infty \ (n \to \infty)$. Dann gibt es laut Definition ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt $x_n > 0$, und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_1, so dass für $n \geq n_1$ gilt $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ gilt dann $0 < \frac{1}{x_n} < \varepsilon$.

Ist umgekehrt $x_n > 0$ für $n \geq n_0$ und $\frac{1}{x_n} \to 0 \ (n \to \infty)$, so gibt es für jedes $c > 0$ ein n_1, so dass für $n \geq n_1$ gilt $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{c}$. Für $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ gilt dann $x_n > c$. $\square$

Beispiel. Aus Satz 16 erhalten wir für $q > 1$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{q^n}{n^k} \to \infty \quad (n \to \infty). \qquad \triangleleft$$

5.2 Limes superior und limes inferior

Es sei weiterhin K ein angeordneter Körper. Aus Satz 28 ergibt sich, dass jede monotone Folge in K einen eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert hat. Für eine beliebige Folge x_n betrachten wir die monoton fallende Folge

$$x_n^+ = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \sup\{x_k \mid k \geq n\}$$

und die monoton wachsende Folge

$$x_n^- = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \inf\{x_k \mid k \geq n\}.$$

Definition 24. *Wir definieren*[11]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n^+, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n^-,$$

und nennen dies den limes superior *bzw. den* limes inferior *der Folge x_n.*

Beispiel. Für die Folge $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ gilt $x_{2k}^+ = x_{2k-1}^+ = 1 + \frac{1}{2k}$ und $x_n^- = -1$, also $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -1$. $\triangleleft$

Satz 34. *Eine Folge x_n ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

In diesem Fall gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Beweis. Angenommen, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = a$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt

$$a - \varepsilon < x_n^-, \qquad x_n^+ < a + \varepsilon.$$

Nach Definition von $x_n^{\pm}$ ist $x_-^n \leq x_n \leq x_n^+$, und die Konvergenz folgt.

Umgekehrt sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

[11] Statt $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$ sind auch die Abkürzungen $\limsup$ und $\liminf$ üblich.

also nach Definition der Grenzen

$$a - \varepsilon \leq x_n^-, \qquad x_n^+ \leq a + \varepsilon.$$

Mit Satz 26 folgt

$$a - \varepsilon \leq \varliminf_{n\to\infty} x_n, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leq a + \varepsilon$$

und, da $\varepsilon > 0$ beliebig war,

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n \leq a \leq \varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

Andererseits folgt aus $x_n^- \leq x_n^+$, dass

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

und somit Gleichheit gilt. □

5.3 Häufungspunkte

Auf einem Körper K sei ein Absolutbetrag mit Werten in einem angeordneten Körper L gegeben.

Definition 25. *Ein Element a von K heißt* Häufungspunkt *einer Folge von Elementen x_n von K, wenn es für jedes $\varepsilon \in L_+$ unendlich viele n gibt, so dass $|x_n - a| < \varepsilon$.*

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist offenbar ein Häufungspunkt.

Beispiel. Da die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleichmächtig sind, gibt es eine Folge in $\mathbb{R}$, in der jede rationale Zahl genau ein Mal vorkommt. Offenbar ist jede reelle Zahl Häufungspunkt dieser Folge. ◁

Satz 35. *Ein Element a ist genau dann Häufungspunkt einer Folge, wenn es Grenzwert einer ihrer Teilfolgen ist.*

Beweis. Es sei a ein Häufungspunkt. Wähle n_1, so dass $|x_{n_1} - a| < 1$, dann wähle $n_2 > n_1$, so dass $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$, dann $n_3 > n_2$, so dass $|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$ usw. Dies ist möglich, da es für jedes k unendlich viele n gibt, so dass $|x_n - a| < \frac{1}{k}$. Offensichtlich gilt $x_{n_k} \to a \ \ (k \to \infty)$.

Umgekehrt sei $x_{n_k} \to a \ \ (k \to \infty)$. Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein k_0, so dass für $k \geq k_0$ gilt $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, also $|x_n - a| < \varepsilon$ für unendlich viele n. □

Für einen angeordneten Körper besteht ein Zusammenhang mit den Begriffen aus dem vorigen Abschnitt:

Satz 36. *Ist der limes superior endlich, so ist er der größte Häufungspunkt. Ist der limes inferior endlich, so ist er der kleinste Häufungspunkt.*

Beweis. Es sei $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ und n_0 finden wir $k \geq n_0$ mit der Eigenschaft $|x_k - a| < \varepsilon$ wie folgt.

Wegen $x_n^+ \to a \ (n \to \infty)$ gibt es $n \geq n_0$, so dass $a - \varepsilon < x_n^+ < a + \varepsilon$. Insbesondere ist $x_k < a + \varepsilon$ für alle $k \geq n$, und $a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Somit gibt es ein $k \geq n$, so dass $a - \varepsilon < x_k$.

Da n_0 beliebig war, finden wir unendlich viele solche k, und a ist ein Häufungspunkt.

Nun sei $b > a$. Dann gibt es zu $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|x_n^+ - a| < \varepsilon$, also $x_n \leq x_n^+ < b - \varepsilon$. Für alle n mit der Eigenschaft $|x_n - b| < \varepsilon$ gilt also $n < n_0$, und somit ist b kein Häufungspunkt. □

Satz 37 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ hat einen Häufungspunkt.*

Beweis. Im Fall von $\mathbb{R}$ folgt das direkt aus dem vorigen Satz. Im Fall von $\mathbb{C}$ finden wir mit Satz 35 erst eine Teilfolge z_{n_k}, für die $\operatorname{Re} z_{n_k}$ konvergent ist, und in dieser wiederum eine Teilfolge $z_{n_{k_l}}$, für die auch $\operatorname{Im} z_{n_{k_l}}$ konvergent ist. Die Behauptung folgt dann aus Satz 35. □

Definition 26. *Eine Teilmenge A von K heißt abgeschlossen in K, wenn jeder Häufungspunkt einer jeden Folge von Elementen von A ebenfalls in A liegt.*

Eine Teilmenge U von K heißt offen in K, wenn es für jedes Element x von U ein $\varepsilon \in L_+$ gibt, so dass alle Elemente y von K mit der Eigenschaft $|x - y| < \varepsilon$ in U liegen.

Beispiel. Nach Satz 26 und 35 ist für jede reelle Zahl a die Menge $[a, \infty[$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$. ◁

Satz 38. *Eine Menge A ist genau dann abgeschlossen in K, wenn ihr Komplement $U = K \setminus A$ offen in K ist.*

Beweis. Angenommen, U ist nicht offen. Dann hat U ein Element x, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $y \in A$ gibt, so dass $|x - y| < \varepsilon$. Insbesondere gibt es für jedes n ein y_n, so dass $|x - y_n| < \frac{1}{n}$. Dann ist $y_n \to x \ (n \to \infty)$, also A nicht abgeschlossen.

Ist U offen, so folgt aus den Definitionen sofort, dass A abgeschlossen ist (Übungsaufgabe). □

6 Reihen

Der antike Philosoph Zenon entdeckte das Paradoxon, dass der Held Achilles einen Wettlauf mit einer Schildkröte nicht gewinnen könnte, falls ihr beim Start ein Vorsprung gewährt würde. Wenn Achilles beim Startpunkt der Schildkröte ankommt, ist sie bereits an einem anderen Ort, wenn er dort ankommt, wieder an einem anderen usw.

Aus mathematischer Sicht ist es aber gar nicht paradox, dass ein beschränktes Zeitintervall unendlich viele Zeitpunkte enthält. Hat die Schildkröte den Vorsprung a und die q-fache Geschwindigkeit von Achilles, wobei $0 < q < 1$, und bezeichnen wir den Weg von Achilles bis zum Überholen mit b, so gilt offenbar $a + qb = b$, also $b = \frac{a}{1-q}$. Die Länge der $n$ten von Achilles durchlaufenen Teilstrecke ist aq^n. Wenn man all diese unendlich vielen Teilstrecken in irgend einem Sinne summieren könnte, sollte sich b ergeben.

6.1 Konvergenz von Reihen

Definition 27. *Für eine Folge reeller oder komplexer Zahlen x_n sei*

$$x_{n_1} + x_{n_1+1} + \ldots = \lim_{m\to\infty}(x_{n_1} + x_{n_1+1} + \ldots + x_m),$$

oder in anderer Schreibweise

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} x_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=n_1}^{m} x_n.$$

Der Term auf der linken Seite heißt Reihe*, sein Wert* Summe der Reihe*. Die Summe auf der rechten Seite heißt m*te Partialsumme*. Die Reihe heißt konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergent ist, sonst heißt sie divergent. (Im letzteren Fall haben beide Seiten eigentlich keinen Sinn.)*

Beispiel. Aus der dritten binomischen Formel folgt die Summenformel der geometrischen Folge für $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}.$$

Für $|q| < 1$ ist die geometrische Reihe konvergent:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{m\to\infty} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Andernfalls ist sie divergent (auch im Fall $q = 1$).

Mit $q = \frac{1}{10^k}$ können wir periodische Dezimalbrüche in gemeine Brüche umwandeln:

$$\begin{aligned} 0{,}\overline{428571} &= \frac{428571}{1000000} + \frac{428571}{1000000^2} + \dots \\ &= \frac{428571}{1000000}\left(1 + \frac{1}{1000000} + \frac{1}{1000000^2} + \dots\right) \\ &= \frac{428571}{1000000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1000000}} = \frac{428571}{999999} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Alle periodischen Dezimalbrüche stellen also rationale Zahlen dar. Das Selbe gilt in anderen Stellenwertsystemen. $\triangleleft$

Beispiel. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{m+1}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Summen der Form $\sum\limits_{n=n_1}^{n_2} (x_n - x_{n+1})$ nennt man *Teleskopsummen*. Eine solche trat auch im Beweis der dritten binomischen Formel auf. In den Lösungen zu Aufgabe 21(b) und Präsenzaufgabe 8(b) benutzt man Teleskopprodukte. $\triangleleft$

Beispiel. Die harmonische Reihe ist

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Wir zerlegen die Partialsummen für den Fall, dass m eine Zweierpotenz ist, in Teilstücke:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

Schätzen wir die Glieder in jedem Teilstück durch das Letzte ab, so folgt

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^k}{2^{k+1}} = 1 + \frac{k+1}{2}.$$

Die harmonische Reihe ist also divergent. $\triangleleft$

Aus Satz 17 und 26 ergibt sich:

Folgerung 11. *Es sei*

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} x_n = a, \qquad \sum_{n=n_1}^{\infty} y_n = b, \qquad c \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt:

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} (x_n + y_n) = a + b, \qquad \sum_{n=n_1}^{\infty} c x_n = ca.$$

Ist $x_n \le y_n$ für alle n, so gilt $a \le b$.

Warnung: Es gibt keine Formel für $\sum\limits_{n=n_1}^{\infty} x_n y_n$.

Satz 39 (Cauchy-Kriterium). *Die Reihe $\sum\limits_{n=n_1}^{\infty} x_n$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein m_0 gibt, so dass für $m \ge m_0$ und $p \ge 0$ gilt*

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} x_n \right| < \varepsilon.$$

Für die Konvergenz der Reihe ist also notwendig (aber nicht hinreichend), dass die Folge der Glieder x_n eine Nullfolge ist.

Beweis. Mit der Bezeichnung $s_m = \sum\limits_{n=n_1}^{m} x_n$ gilt

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} x_n = s_{m+p} - s_m.$$

Die im Satz genannte Bedingung bedeutet also, dass die Folge der Partialsummen s_m eine Cauchyfolge ist. Damit folgt die Behauptung aus Satz 19 und 23 bzw. 32. □

Nun betrachten wir Reihen mit reellen Gliedern.

Folgerung 12. *Eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern ist genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen von oben beschränkt ist.*

Dies folgt aus Satz 15 und dem Monotoniekriterium (Satz 28), denn die Folge s_m ist genau dann monoton wachsend, wenn $x_n \ge 0$ für alle n gilt.

Beispiel. Für alle $m \ge 1$ erhalten wir mit einem früheren Beispiel

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \le 1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{(n+1)n} \le 2,$$

also ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent. $\triangleleft$

Eine Reihe heißt *alternierend*, wenn ihre Glieder abwechselnd nichtnegativ und nichtpositiv sind, z. B.

$$x_{2k} \geq 0, \qquad x_{2k+1} \leq 0.$$

Satz 40 (Leibniz-Kriterium)**.** *Ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *alternierend und ist* $|x_n|$ *eine monoton fallende Nullfolge, so ist die Reihe konvergent.*

Beweis. Wir betrachten die Teilfolgen s_{2k} und s_{2k+1} der Partialsummenfolge s_m. Sind die Vorzeichen wie oben, so gilt

$$\begin{aligned} s_{2k+1} - s_{2k} &= x_{2k+1} \leq 0, \\ s_{2(k+1)} - s_{2k} &= x_{2k+1} + x_{2k+2} = -|x_{2k+1}| + |x_{2k+2}| \leq 0, \\ s_{2(k+1)+1} - s_{2k+1} &= x_{2k+2} + x_{2k+3} = |x_{2k+2}| - |x_{2k+3}| \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist die Folge s_{2k} monoton fallend mit unterer Schranke s_1 und die Folge s_{2k+1} monoton wachsend mit oberer Schranke s_0. Nach dem Monotoniekriterium sind beide konvergent, und weil $s_{2k} - s_{2k+1} = |x_{2k+1}|$ eine Nullfolge ist, haben beide den selben Grenzwert a. Nach der Präsenzaufgabe 12 ist auch $s_m \to a \ (m \to \infty)$. $\square$

Wir erhalten sogar eine Fehlerabschätzung: Für jedes m liegt a zwischen s_m und s_{m+1}, also

$$|s_m - a| \leq |x_{m+1}|.$$

Beispiel. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$$

ist konvergent, die Reihensumme a ist größer als $\frac{1}{2}$.

Nun ordnen wir die Reihe um, indem wir auf ein positives Glied immer zwei negative folgen lassen, und betrachten nur eine Teilfolge der Partialsummenfolge:

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{16} + \dots \\ &\qquad = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + - \dots = \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

wobei wir Folgerung 11 benutzt haben. Wegen $a \neq 0$ ist $\frac{a}{2} \neq a$, die Reihensumme hat sich also durch das Umordnen geändert. $\triangleleft$

6.2 Umordnungen und absolute Konvergenz

Wir betrachten wieder Reihen mit reellen oder komplexen Gliedern.

Definition 28. *Die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *heißt* Umordnung *der Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, *wenn es eine bijektive Abbildung* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gibt, so dass* $y_n = x_{\sigma(n)}$ *für alle* n *gilt.*

Dies definiert offensichtlich eine Äquivalenzrelation zwischen Reihen.

Definition 29. *Die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *heißt* absolut konvergent, *wenn die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *konvergent ist. Eine Reihe, die konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, nennt man* bedingt konvergent.

Der Begriff „absolute Konvergenz“ ist gerechtfertigt, denn aus Satz 39 erhalten wir:

Folgerung 13. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Nach der Dreiecksungleichung gilt nämlich für alle natürlichen Zahlen m und p

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} x_n\right| \leq \sum_{n=m+1}^{m+p} |x_n|.$$

Erfüllt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ das Cauchy-Kriterium, so auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.

Für Folgen gibt es keinen Begriff der absoluten Konvergenz.

Satz 41. *Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist auch jede Umordnung absolut konvergent und hat die selbe Summe.*

Beweis. Es sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und τ die Umkehrabbildung. Ist nun $\varepsilon > 0$, dann gibt es wegen der absoluten Konvergenz ein m_0, so dass

$$\sum_{n=m_0+1}^{\infty} |x_n| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| - \sum_{n=0}^{m_0} |x_n|\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setzen wir $k_0 = \max\{\tau(0), \ldots, \tau(m_0)\}$, dann gilt

$$\{0, 1, 2, \ldots, m_0\} \subseteq \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(k_0)\}.$$

Für $k \geq k_0$ und $m \geq m_0$ folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{n=0}^{k} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{m} x_n\right| \leq \sum_{n=m_0+1}^{m'} |x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei $m' = \max\{m, \sigma(0), \dots, \sigma(k)\}$, denn von der ersten Summe bleiben nur die Glieder mit $\sigma(n) > m$ und von der zweiten Summe nur die mit $\tau(n) > k$. Unter den Gliedern, die sich wegkürzen, sind auf jeden Fall $x_0, \dots, x_{m_0}$.

Wegen der Konvergenz der ursprünglichen Reihe können wir m so wählen, dass

$$\left| \sum_{n=0}^{m} x_n - a \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei a die Reihensumme bezeichnet. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\left| \sum_{n=0}^{k} x_{\sigma(n)} - a \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{k} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{m} x_n \right| + \left| \sum_{n=0}^{m} x_n - a \right| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, haben wir bewiesen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = a.$$

Die selbe Überlegung mit $|x_n|$ an Stelle von x_n beweist die absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe. □

Satz 42. *Ist eine Reihe mit reellen Gliedern bedingt konvergent, so gibt es für jedes abgeschlossene Intervall I eine Umordnung, so dass die Menge der Häufungspunkte der Partialsummenfolge gleich I ist. Im Fall $I \neq \varnothing$ ist der limes superior dieser Folge gleich* $\sup I$ *und ihr limes inferior gleich* $\inf I$.

Mit Satz 34 sehen wir, dass man insbesondere jede beliebige Reihensumme erzeugen kann.

Beweisskizze. Wir setzen

$$x_n^+ = \max\{x_n, 0\}, \qquad x_n^- = \min\{x_n, 0\},$$

so dass $x_n = x_n^+ + x_n^-$. Wir behaupten, dass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$$

divergent sind. Angenommen, die erste der beiden wäre konvergent. Wegen $x_n^- = x_n^+ - x_n$ wäre nach Folgerung 11 auch die zweite konvergent, und wegen $|x_n| = x_n^+ - x_n^-$ wäre die gegebene Reihe absolut konvergent (Widerspruch).

Wir können annehmen, dass $x_n \neq 0$ für alle n. Es sei u_n die Teilfolge der positiven und v_n die der negativen Glieder in der Folge x_n. Man erhält diese aus den Folgen x_n^+ bzw. x_n^-, indem man alle Nullen entfernt. Es sei $c = \inf I$ und $d = \sup I$. Sind c und d endlich, dann bilden wir eine neue Folge x_n' mit Partialsummen s_m' wie folgt:

$u_1, u_2, \dots, u_{n_1}$ solange, bis $s'_{n_1} \geq d$, dann

$v_1, v_2, \dots, v_{n_2}$ solange, bis $s'_{n_1+n_2} \leq c$, dann

$u_{n_1+1}, u_{n_1+2}, \dots u_{n_1+n_3}$ solange, bis $s'_{n_1+n_2+n_3} \geq d$

usw.

Ist hingegen $d = \infty$, dann wählt man n_{2k+1} jeweils so, dass

$$s'_{n_1+\ldots+n_{2k+1}} \geq k.$$

Ist $c = \infty$, also $I = \varnothing$, dann wählt man n_{2k+1} ebenso und setzt $n_{2k} = 1$ für alle k. Ist schließlich $c = -\infty$, dann wählt man n_{2k} so, dass

$$s'_{n_1+\ldots+n_{2k}} \leq -k.$$

All dies ist nach Folgerung 12 möglich wegen der Divergenz der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Für jedes $a \in I$ gibt es beliebig große n, so dass $s'_{n-1} \leq a \leq s'_n$ oder $s'_{n-1} \geq a \geq s'_n$, also in jedem Fall $|s'_n - a| < x'_n$. Da x'_n eine Nullfolge ist, ist es auch x'_n, und somit ist a ein Häufungspunkt.

Ist d endlich, so gilt für $n_{2k-1} \leq n < n_{2k+1}$, dass $s'_n \leq d + u_{n_1+\ldots+n_{2k-1}}$. Da x'_n eine Nullfolge ist, ist kein Häufungspunkt größer als d. □

Folgerung 14. *Eine Reihe mit reellen oder komplexen Gliedern ist genau dann absolut konvergent, wenn jede ihrer Umordnungen konvergent ist.*

Für reelle Glieder folgt eine Richtung aus Satz 41 und die andere aus Satz 42. Sind die Glieder $z_n = x_n + y_n$ komplex und ist jede Umordnung von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergent, so ist auch jede Umordnung von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ und jede von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergent. Nach Satz 42 sind beide absolut konvergent, und mit der Dreiecksungleichung folgt die absolute Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$.

6.3 Kriterien der absoluten Konvergenz

Folgerung 14 zeigt die Bedeutung der absoluten Konvergenz. Man möchte feststellen, ob sie bei einer gegebenen Reihe vorliegt. Die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ ist nach Folgerung 12 gleichbedeutend mit der Beschränktheit der Partialsummenfolge der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.

Folgerung 15 (Vergleichskriterium)**.** *Für alle n sei $0 \le x_n \le y_n$. Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergent, so auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.*

In der Tat ist in dieser Situation für alle m

$$\sum_{n=0}^{m} x_n \le \sum_{n=0}^{m} y_n.$$

Wir haben dieses Kriterium praktisch bereits im Fall $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n(n+1)}$ angewendet.

Beispiel. Für $x_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ ist nach dem Beweis von Satz 29

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \ge \frac{2}{n},$$

also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergent. $\triangleleft$

Satz 43 (Wurzelkriterium)**.** *Es sei*

$$a = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|}.$$

Ist $a < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergent, ist hingegen $a > 1$, so ist die Reihe divergent. (Letzteres auch, wenn $a = \infty$.)

Beweis. Ist $a < 1$, so gibt es ein $q \in \mathbb{R}$, so dass $a < q < 1$, und ein n_0, so dass für $n \ge n_0$ gilt $\sqrt[n]{|x_n|} \le q$, also wegen der Monotonie der Wurzelfunktion $|x_n| \le q^n$, und die Behauptung folgt durch Vergleich mit der geometrischen Reihe.

Ist $a > 1$, so gibt es unendlich viele n mit der Eigenschaft $\sqrt[n]{|x_n|} \ge 1$, d. h. $|x_n| \ge 1$. Also ist x_n keine Nullfolge und die Reihe nach Satz 39 divergent. $\square$

In dem obigen Beispiel $x_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ versagt das Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{n+1}{n\sqrt[n]{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \ \ (n \to \infty).$$

Das Wurzelkriterium ist oft schwer nachzuprüfen. Manchmal hilft

Satz 44 (Quotientenkriterium)**.** *Es sei $x_n \neq 0$ für genügend große n.*

(i) *Ist $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ absolut konvergent.*

(ii) *Ist* $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$ *für genügend große* n*, so ist die Reihe divergent.*

Beweis. **(i)** Ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < q < 1$, dann gibt es ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q$, also $|x_{n+1}| \leq q|x_n|$. Durch vollständige Induktion zeigt man $|x_n| \leq q^{n-n_0}|x_{n_0}|$, und die Behauptung folgt durch Vergleich mit der geometrischen Reihe.
(ii) Für alle n ab einem gewissen n_0 gilt $|x_{n+1}| \geq |x_n|$, also ist x_n keine Nullfolge. □

Bemerkung. Man sieht am Beweis, dass

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|,$$

also ist das Wurzelkriterium mindestens so stark wie das Quotientenkriterium. Stärker ist es z. B. für

$$1 + 1 + q + q + q^2 + q^2 + \dots \qquad (|q| < 1).$$

Bemerkung. Die Bedingung in (ii) ist z. B. für $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$ erfüllt. Man kann sie nicht durch den limes superior ausdrücken, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$1 + 2 + q + 2q + q^2 + 2q^2 + \dots \qquad (|q| < 1).$$

Beispiel. Für $x_n = \frac{n!^2}{(2n)!}$ ist

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{4} \ (n \to \infty),$$

also ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ (absolut) konvergent. ◁

Nicht nur die geometrische Reihe eignet sich als Vergleichsobjekt.

Satz 45. *Es sei* $s \in \mathbb{Q}$*. Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ist für $s > 1$ *konvergent und für* $s \leq 1$ *divergent.*

Beweis. Wegen der Positivität der Glieder genügt es, eine Teilfolge der Partialsummenfolge zu betrachten. Dazu schätzen wir Teilstücke der Reihe nach oben und unten ab. Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{2^k}{(2^{k+1})^s} \leq \frac{1}{(2^k+1)^s} + \frac{1}{(2^k+2)^s} + \ldots + \frac{1}{(2^{k+1})^s} \leq \frac{2^k}{(2^k)^s}.$$

Summieren wir über $k \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$, so erhalten wir

$$2^{-s} \sum_{k=0}^{l-1} \left(2^{1-s}\right)^k \leq \sum_{n=1}^{2^l} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{k=0}^{l-1} \left(2^{1-s}\right)^k.$$

Nach der Monotonie der Potenz- und Wurzelfunktion ist $2^{1-s} < 1$ für $s > 1$ und $2^{1-s} \geq 1$ für $s \leq 1$. Nun folgt die Behauptung durch Vergleich mit der geometrischen Reihe. □

Beispiel. Wegen

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{(n+1)-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq \frac{1}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n})}$$

ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ konvergent. ◁

6.4 Potenzreihen

Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Jedes Polynom mit Koeffizienten a_n in K definiert eine Funktion f auf K:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n.$$

Als Verallgemeinerung betrachten wir Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{3}$$

Satz 46. (i) *Es sei* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = a \in \mathbb{R}$. *Dann ist die Potenzreihe* (3) *für* $a|z| < 1$ *absolut konvergent und für* $a|z| > 1$ *divergent.*

(ii) *Ist die Folge* $\sqrt[n]{|a_n|}$ *unbeschränkt, so ist die Potenzreihe* (3) *für* $z \neq 0$ *divergent.*

Beweis. Aussage (i) folgt wegen $\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z|$ aus dem Wurzelkriterium.

Im Fall (ii) ist die Folge $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z|$ unbeschränkt, also auch die Folge der $n$ten Potenzen $|a_n z^n|$. □

Definition 30. *Der* Konvergenzradius *der Potenzreihe ist im Fall (i) die Zahl $r = \frac{1}{a}$ (wobei wir $\frac{1}{0} = \infty$ setzen) und im Fall (ii) die Zahl $r = 0$. Die Menge $\{z \in K \mid |z| < r\}$ nennt man im Fall $K = \mathbb{R}$ das* Konvergenzintervall *und im Fall $K = \mathbb{C}$ den* Konvergenzkreis *der Potenzreihe.*

Folgerung 16. *Die Potenzreihe (3) ist für $|z| < r$ absolut konvergent und für $|z| > r$ divergent.*

Aus dem Quotientenkriterium erhalten wir:

Folgerung 17. *Ist die Reihe $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ konvergent, so gilt*

$$a = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Aus Folgerung 11 erhalten wir

Folgerung 18. *Ist eine weitere Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit dem Konvergenzradius s gegeben, so gilt für $|z| < \min\{r, s\}$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Beispiel. Die geometrische Reihe ist eine Potenzreihe. Für $|z| < 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

für $|z| \geq 1$ ist die Reihe divergent. ◁

Beispiel. Jedes Polynom ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞, z. B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n = (1+z)^m,$$

wobei

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. $\triangleleft$

Beispiel. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{4}$$

ist für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, denn es gilt

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

nach den Rechenregeln für Grenzwerte und Aufgabe 21. $\triangleleft$

Satz 47. *Für alle komplexen Zahlen z gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Beweis. Nach der binomischen Formel gilt

$$\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \frac{z^n}{n!},$$

wobei

$$a_{m,n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{m^n} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right).$$

Wir wollen zeigen, dass die Folge der Zahlen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - a_{m,n}) \frac{z^n}{n!}$$

für $m \to \infty$ gegen Null konvergiert. Zunächst merken wir an, dass

$$1 = a_{m,0} = a_{m,1} > a_{m,2} > \dots > a_{m,m} > a_{m,m+1} = \dots = 0.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt für beliebiges n_0

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m \right| \le \left| \sum_{n=0}^{n_0} (1 - a_{m,n}) \frac{z^n}{n!} \right| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}.$$

Wegen der vor dem Satz gezeigten absoluten Konvergenz gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so dass der zweite Term kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Angesichts von $a_{m,n} \to 1$ $(m \to \infty)$ und den Rechenregeln für Grenzwerte gibt es ein m_0, so dass der erste Term für $m \ge m_0$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. $\square$

Definition 31. *Wir bezeichnen die Potenzreihe* (4) *als* Exponentialreihe *und kürzen ihre Summe mit* $\exp z$ *ab. Die dadurch dargestellte Funktion nennen wir* Exponentialfunktion.

Dies ist natürlich verträglich mit Definition 20.

Lemma 1. *Definieren wir auf der Menge* $\{z \in K \mid |z| \leq c\}$ *eine Funktion* f *durch*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{5}$$

wobei c *kleiner als der Konvergenzradius* r *ist, so ist die Funktion beschränkt.*

Beweis. Für z im Definitionsbereich von f gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{m} |a_n||z|^n \leq \sum_{n=0}^{m} |a_n| c^n.$$

Nach Definition von r konvergiert die rechte Seite für $m \to \infty$ gegen eine Zahl d. Die Menge $\{w \in K \mid |w| \leq d\}$, die alle Partialsummen enthält, ist abgeschlossen (Übungsaufgabe). □

Definition 32. *Die Zahl* $a \in K$ *heißt Häufungspunkt der Teilmenge* M *von* K*, wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein Element* x *von* M *gibt, so dass* $x \neq a$ *und* $|x - a| < \varepsilon$*.*

(Es gibt dann unendlich viele solche x.)

Satz 48. *Hat die Potenzreihe* (5) *einen positiven Konvergenzradius und ist* 0 *ein Häufungspunkt der Nullstellenmenge von* f*, so ist* $a_n = 0$ *für alle* n*.*

Beweis. Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es eine kleinste natürliche Zahl m, so dass $a_m \neq 0$. Nun ist

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n = z^m \left(a_m + z \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+1+k} z^k \right).$$

Für jede Nullstelle $z \neq 0$ mit $|z| < c$ folgt

$$0 = a_m + z \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+1+k} z^k$$

Wir wählen c, so dass $0 < c < r$. Nach dem Lemma gibt es ein $d > 0$, so dass für $|z| \leq c$ gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+1+k} z^k \right| \leq d,$$

und wenn zusätzlich $z \neq 0$ eine Nullstelle ist,

$$|a_m| \leq d|z|.$$

Dann kann 0 aber kein Häufungspunkt der Nullstellenmenge sein (Widerspruch). $\square$

6.5 Doppelreihen

Wollen wir alle Einträge in einer Tabelle von Zahlen addieren, so können wir erst die Spaltensummen bilden und diese addieren:

$$\begin{array}{cccc}
z_{00} & z_{01} & z_{02} & \cdots \\
z_{10} & z_{11} & z_{12} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\hline
s_0 & s_1 & s_2 & \cdots
\end{array}$$

Wir können auch erst die Zeilensummen bilden und diese addieren. Schließlich können wir auch die Tabelleneinträge in irgend einer Reihenfolge addieren. Dies läuft auf eine Umordnung hinaus und kann bei „Tabellen“ mit unendlich vielen Zeilen und Spalten verschiedene Ergebnisse liefern.

Satz 49. *Für alle natürlichen Zahlen m und n seien komplexe Zahlen $z_{m,n}$ gegeben. Es seien m_k und n_k Folgen natürlicher Zahlen, so dass die durch $k \mapsto (m_k, n_k)$ gegebene Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijektiv ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_{m_k,n_k}$$

ist absolut konvergent.

(ii) *Es gibt eine reelle Zahl d, so dass für alle natürlichen Zahlen M und N gilt*

$$\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} |z_{m,n}| \leq d.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_{m_k,n_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} z_{m,n}.$$

Beweis. Wir betrachten die Partialsummen

$$\sum_{k=0}^{K} |z_{m_k,n_k}|, \qquad \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} |z_{m,n}|.$$

Ist K gegeben, so ist die linke Summe eine Teilsumme der rechten für $M = \max\{m_k \mid k \leq K\}$ und $N = \max\{n_k \mid k \leq K\}$. Sind hingegen M und N gegeben, so ist die rechte Summe eine Teilsumme der linken für $K = \max\{k \mid m_k \leq M,\, n_k \leq N\}$. Ist also die eine Menge von Partialsummen beschränkt, so auch die andere, und die Äquivalenz von (i) und (ii) ergibt sich mit Folgerung 12.

Nun seien (i) und (ii) erfüllt und $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach dem Cauchykriterium gibt es ein k_0, so dass für $K \geq k_0$ gilt

$$\sum_{k=k_0+1}^{K} |z_{m_k,n_k}| < \varepsilon.$$

Für

$$M \geq \max\{m_k \mid k \leq k_0\}, \qquad N \geq \max\{n_k \mid k \leq k_0\},$$
$$K \geq \max\{k \mid m_k \leq M,\, n_k \leq N\}$$

folgt ähnlich wie im Beweis von Satz 41

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} z_{m,n} - \sum_{k=0}^{K} z_{m_k,n_k} \right| \leq \sum_{k=k_0+1}^{K} |z_{m_k,n_k}| < \varepsilon.$$

Für festes M und N können wir zum Grenzwert $K \to \infty$ übergehen und erhalten nach Satz 26 und Präsenzaufgabe 12

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} z_{m,n} - \sum_{k=0}^{\infty} z_{m_k,n_k} \right| \leq \varepsilon.$$

Da die innere Reihe nach (ii) absolut konvergent ist, können wir auch zum Grenzwert $M \to \infty$ übergehen und erhalten

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} z_{m,n} - \sum_{k=0}^{\infty} z_{m_k,n_k} \right| \leq \varepsilon.$$

Nun folgt die Behauptung mit der Grenzwertdefinition. $\square$

Folgerung 19 (Doppelreihensatz)**.** *Unter der Bedingung (i) oder (ii) gilt*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} z_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} z_{m,n}.$$

Wenden wir den Satz zusätzlich auf die Reihe mit den Gliedern $w_{mn} = z_{nm}$ an, so sehen wir, dass die beiden Doppelreihen gleich zwei einfachen Reihen sind, die durch Umordnung ineinander überführt werden können, also nach Satz 41 gleich sind.

Folgerung 20 (Reihenmultiplikation)**.** *Es gilt*

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_m \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_{m_k} y_{n_k},$$

falls die Reihen auf der linken Seite absolut konvergent sind.

Wegen

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} x_m y_n = \sum_{m=0}^{M} x_m \sum_{n=0}^{N} y_n$$

ist nämlich die Bedingung (ii) für $z_{m,n} = x_m y_n$ erfüllt.

Nun kommen wir zu den Anwendungen.

Satz 50. *Haben die Potenzreihen*

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

die Konvergenzradien r bzw. s, so gilt für $|z| < \min\{r, s\}$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l,$$

wobei

$$c_l = \sum_{m=0}^{l} a_m b_{l-m} = \sum_{n=0}^{l} a_{l-n} b_n.$$

Beweis. Nach Folgerung 16 sind beide Reihen für die angegebenen Argumente z absolut konvergent, und Folgerung 20 ist anwendbar. Es sei $L_l = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m + n = l\}$. Die Summe der Glieder der Doppelreihe über die Elemente von L_l ist $c_l z^l$. Wir lassen die Folge (m_k, n_k) der Reihe nach die Mengen L_0, L_1, L_2, ... durchlaufen. Betrachten wir nur die Partialsummen nach Erledigung einer dieser Mengen, so erhalten wir eine Teilfolge, die gerade die Partialsummenfolge der rechten Seite in Satz 50 ist. □

Satz 51. *Für alle komplexen Zahlen z und w gilt*

$$\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w.$$

Beweis. Wir wenden Satz 50 an und berechnen die Koeffizienten mit Hilfe der binomischen Formel:

$$\sum_{n=0}^{l} \frac{z^{l-n}}{(l-n)!} \cdot \frac{w^n}{n!} = \frac{1}{l!} \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} z^{l-n} w^n = \frac{(z+w)^l}{l!}. \qquad \square$$

Satz 52. *Die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$

habe den Konvergenzradius r, und es sei $c \in \mathbb{C}$, so dass $|c| < r$. Dann gilt für $|z-c| < r - |c|$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n,$$

wobei

$$b_n = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m c^{m-n}.$$

Beweis. Nach der binomischen Formel ist

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \bigl(c + (z-c)\bigr)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} a_m \binom{m}{n} c^{m-n} (z-c)^n.$$

(Hier wie auch im Satz können wir alle Summen von 0 bis ∞ erstrecken.) Nach der Dreiecksungleichung und der binomischen Formel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} \left| a_m \binom{m}{n} c^{m-n} (z-c)^n \right| &\leq \sum_{m=0}^{N} |a_m| \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} |c|^{m-n} |z-c|^n \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \bigl(|c| + |z-c|\bigr)^m. \end{aligned}$$

Wegen $|c| + |z-c| < r$ ist die rechts stehende Reihe konvergent, also ist Bedingung (ii) von Satz 49 erfüllt und Folgerung 19 anwendbar. $\square$

Definition 33. *Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und D eine offene Teilmenge von K. Eine Funktion $f : D \to K$ heißt* K-analytisch, *wenn es für jedes Element c von D ein $r > 0$ und eine Folge von Zahlen $a_n \in K$ gibt, so dass für $z \in D$ mit der Eigenschaft $|z - c| < r$ gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

So ist z. B. die Funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ analytisch, denn für $|z - c| < |1 - c|$ gilt

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-c}{1-c}} = \frac{1}{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-c}{1-c}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(1-c)^{n+1}}.$$

Nach Satz 52 definiert jede Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius eine analytische Funktion auf ihrem Konvergenzkreis.

7 Stetige Funktionen

7.1 Definition und Kriterien der Stetigkeit

Intuitiv unterscheidet man bei Funktionen zwischen sprunghafter und stetiger Änderung. Wir wollen diese Eigenschaft exakt beschreiben. Wir betrachten Funktionen $f : D \to L$ mit einem Definitionsbereich $D \subset K$, wobei K und L vollständige Körper mit Absolutbetrag sind. Für uns kommen dafür nur $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ in Frage. Wir beginnen mit einem einfacheren Begriff.

Definition 34. *Eine Funktion $f : D \to L$ heißt* Lipschitz-stetig, *wenn es eine Zahl $d > 0$ gibt, so dass für alle Elemente x und y von D gilt*

$$|f(x) - f(y)| \leq d|x - y|.$$

Satz 53. *Eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit dem Konvergenzradius r stellt auf der Menge $D = \{x \in K \,\big|\, |x| \leq c\}$ eine Lipschitz-stetige Funktion f dar, falls $c < r$.*

Beweis. Nach der dritten binomischen Formel und der Dreiecksungleichung gilt für x und y in D

$$|x^n - y^n| \leq |x - y| \sum_{k=1}^{n} |x|^{n-k} |y|^k \leq n c^n |x - y|,$$

und durch Summation erhalten wir

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n(x^n - y^n)\right| \leq \sum_{n=0}^{m} n|a_n|c^n.$$

Rechts stehen die Partialsummen einer Potenzreihe, die nach Satz 46 ebenfalls den Konvergenzradius r hat. Mit Satz 26 erhalten wir durch Grenzübergang $m \to \infty$

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|c^n. \qquad \square$$

Es folgt, dass die Einschränkungen der ganzrationalen Funktionen und der Exponentialfunktion auf jede beschränkte Menge Lipschitz-stetig sind. Die Signum-Funktion auf $\mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und die Quadratwurzelfunktion sind nicht Lipschitz-stetig, denn die Ungleichung $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq d|x - 0|$ ist für $0 < x < d^{-2}$ verletzt.

Definition 35. *Es sei $D \subseteq K$ und $a \in D$. Eine Funktion $f : D \to L$ heißt* stetig *an der Stelle a, wenn es für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit der Eigenschaft $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Eine Funktion heißt stetig, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist.

Offensichtlich ist jede Lipschitz-stetige Funktion stetig, denn man kann $\delta = \varepsilon/d$ wählen. Insbesondere sind alle ganzrationalen Funktionen und die Exponentialfunktion stetig. Die Signumfunktion ist an jeder Stelle mit Ausnahme von 0 stetig.

Satz 54 (Folgenkriterium der Stetigkeit)**.** *Eine Funktion $f : D \to L$ ist genau dann an der Stelle a stetig, wenn für jede Folge x_n in D mit Grenzwert a die Folge $f(x_n)$ gegen $f(a)$ konvergiert.*

Beweis. Es sei f stetig in a und $x_n \to a$ $(n \to \infty)$. Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit ein $\delta > 0$, so dass für $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, und wegen der Konvergenz der Folge gibt es ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \delta$. Für diese n gilt dann $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$, und weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $f(x_n) \to f(a)$ $(n \to \infty)$.

Nun sei f nicht stetig in a, d. h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ ein $x \in D$ existiert, für das $|x - a| < \delta$, aber $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ gilt. Wir halten ε fest und wählen für jedes $\delta = \frac{1}{n}$ ein x_n wie oben. Dann gilt $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, also $x_n \to a \ (n \to \infty)$. Andererseits ist $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$, also $f(x_n) \not\to f(a) \ (n \to \infty)$. □

Sind Funktionen $f : D_1 \to L$ und $D_2 \to L$ gegeben, so definieren wir Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ mit Definitionsbereich $D_1 \cap D_2$ sowie eine Funktion $\frac{1}{f}$ mit Definitionsbereich $\{x \in D \mid f(x) \neq 0\}$ durch

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Satz 55. *Die Funktionen f und g seien an der Stelle a stetig. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ an der Stelle a stetig. Ist außerdem $f(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion $\frac{1}{f}$ an der Stelle a stetig.*

Beweis. Für jede Folge von Elementen x_n von D mit Grenzwert a gilt $f(x_n) \to f(a)$ und $g(x_n) \to g(a)$ nach Satz 54. Mit Satz 17 folgt

$$f(x_n) + g(x_n) \to f(a) + g(a), \qquad f(x_n) \cdot g(x_n) \to f(a) \cdot g(a) \quad (n \to \infty).$$

Ist $f(a) \neq 0$, so folgt mit Satz 18, dass

$$\frac{1}{f(x_n)} \to \frac{1}{f(a)} \quad (n \to \infty).$$

Nun folgt die Behauptung mit Hilfe der anderen Richtung von Satz 54. □

Man hätte den Beweis auch direkt nach dem Muster der Beweise von Satz 17 und 18 führen können. Zur Abwechslung werden wir das beim nächsten Satz tun. Hier geht es um die Verkettung $f \circ g$ von Funktionen $f : D \to L$ und $g : E \to K$, wobei E in einem Körper M liegt. Die Verkettung existiert, wenn der Wertebereich von g in D liegt. (In der Analysis unterscheidet man nicht zwischen einer Funktion g und ihrer Beschränkung ${}_D|g$.)

Satz 56. *Die Funktion g sei stetig an der Stelle a, und die Funktion f sei stetig an der Stelle $g(a)$. Existiert die Verkettung $f \circ g$, so ist sie stetig an der Stelle a.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f in $g(a)$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $x \in D$ mit der Eigenschaft $|x - g(a)| < \delta$ gilt $|f(x) - f(g(a))| < \varepsilon$. Wegen der Stetigkeit von g in a gibt es ein $\eta > 0$, so dass für $u \in E$ mit $|u - a| < \eta$ gilt $|g(u) - g(a)| < \delta$. Für diese u folgt $|f \circ g(u) - f \circ g(a)| < \varepsilon$. □

Satz 57. *Eine streng monotone Funktion auf einem Intervall, deren Wertebereich ebenfalls ein Intervall ist, ist stetig.*

Beweis. Es seien I und J Intervalle und $f : I \to J$ streng monoton wachsend und bijektiv. Wir beweisen die Stetigkeit von f an einer Stelle $a \in I$. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
<u>1. Fall:</u> Es gibt ein $c \in J$ mit $c < f(a)$. Setzen wir $d = \max\{c, f(a) - \varepsilon\}$, dann ist $d < f(a)$. Da J ein Intervall ist, folgt $d \in J$, und wegen der Surjektivität von f gibt es ein $b \in I$, so dass $f(b) = d$. Wegen der Monotonie folgt aus $f(b) < f(a)$, dass $b < a$, und für alle $x \in I$ gilt

$$b < x \leq a \quad \Rightarrow \quad f(a) - \varepsilon < f(x) \leq f(a).$$

<u>2. Fall:</u> $f(a) = \min J$. Dann ist wegen der strengen Monotonie $a = \min I$. Also erhalten wir das selbe Ergebnis wie im 1. Fall, wenn wir $b = a - 1$ setzen.

Analog findet man ein $b' > a$, so dass für alle $x \in I$ gilt

$$a \leq x < b' \quad \Rightarrow \quad f(a) \leq f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Setzen wir $\delta = \min\{a - b, b' - a\}$, so folgt für $x \in I$

$$a - \delta \leq x \leq a + \delta \quad \Rightarrow \quad f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon. \qquad \square$$

7.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 58. *Ist D eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so hat jede stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ein Maximum und ein Minimum.*

Beweis. Es sei $d = \sup f$. Dann gibt es eine streng monoton wachsende Folge y_n, die den eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert d hat. Für jedes n gibt es wegen $y_n < d$ ein $x_n \in D$, so dass $y_n < f(x_n) \leq d$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die Folge x_n einen Häufungspunkt a, der wegen der Abgeschlossenheit in D liegt. Nach Satz 35 konvergiert eine Teilfolge x_{n_k} gegen a, und nach Satz 54 gilt $f(x_{n_k}) \to f(a)$ $(k \to \infty)$. Die Folge y_{n_k} ist also beschränkt und nach Satz 28 konvergent, und mit Satz 27 folgt $d = f(a)$.

Durch Anwendung des Bewiesenen auf die Funktion $-f$ erhalten wir die Aussage über das Minimum. $\square$

Satz 59 (Zwischenwertsatz)**.** *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, wobei I ein Intervall ist, und gilt für Elemente $a \leq b$ von I, dass $f(a) \leq d \leq f(b)$, dann gibt es ein Element $c \in [a, b]$, so dass $f(c) = d$.*

Beweis. Die Menge
$$M = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq d\}$$
enthält a und hat die obere Schranke b. Setzen wir $c = \sup M$, so gilt also $a \leq c \leq b$ und somit $c \in I$.

Wäre $f(c) > d$, so wäre $c \neq a$, und es gäbe ein $\delta > 0$, so dass für $x \in I$ mit $|x - c| < \delta$ gilt $f(x) > d$. All diese x wären obere Schranken von M (Widerspruch).

Wäre $f(c) < d$, so wäre $c \neq b$, und es gäbe ein $\delta > 0$, so dass für $x \in I$ mit $|x - c| < \delta$ gilt $f(x) < d$. All diese x würden zu M gehören (Widerspruch). □

Wenden wir den Satz auf die Funktion $-f$ an, so sehen wir, dass er auch unter der Vorausstzung $f(a) \geq d \geq f(b)$ gilt. Wir sehen also:

Folgerung 21. *Ist I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist der Wertebereich von f ein Intervall.*

Zusammen mit Satz 57 ergibt dies:

Folgerung 22. *Ist I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton mit dem Wertebereich J, so ist die Umkehrfunktion $g : J \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig und streng monoton.*

Nach Folgerung 10 ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend, und aus Satz 29(i) und Folgerung 8 ergibt sich der Wertebereich $]0, \infty[$.

Folgerung 23. *Die Funktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *hat eine stetige streng monoton wachsende Umkehrfunktion* $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, *genannt* natürlicher Logarithmus. *Für alle $s > 0$, $t > 0$ gilt*
$$\ln(s \cdot t) = \ln s + \ln t, \qquad 1 - \frac{1}{s} \leq \ln s \leq s - 1.$$

Mit Hilfe der Substitution $x = \ln s$, $y = \ln t$ folgt diese Funktionalgleichung aus derjenigen in Satz 29(iii), und die Ungleichungen folgen aus Satz 29(i) und Folgerung 8 (Übungsaufgabe).

Nun betrachten wir die Exponentialfunktion von komplexen Argumenten.

Definition 36. *Der* Sinus *und der* Kosinus *einer reellen Zahl t sind*
$$\sin t = \operatorname{Im} \exp it, \qquad \cos t = \operatorname{Re} \exp it.$$

Satz 60. (i) *Die Sinusfunktion ist ungerade, die Kosinusfunktion ist gerade, beide sind stetig, und es gelten die Additionstheoreme*
$$\sin(s + t) = \sin s \, \cos t + \cos s \, \sin t,$$
$$\cos(s + t) = \cos s \, \cos t - \sin s \, \sin t$$
für alle reellen Zahlen s und t.

(ii) *Es gibt eine kleinste positive Zahl* π *mit der Eigenschaft* $\exp \pi i = -1$, *und es gilt*

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t, \qquad \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t.$$

(iii) *Jede komplexe Zahl* $z \neq 0$ *lässt sich eindeutig in der Form*

$$z = r \exp it$$

mit $r > 0$ *und* $t \in [0, 2\pi[$ *schreiben. (Man nennt* t *das* Argument *von* z, *abgekürzt* $\arg z$.*)*

(iv) *Die Sinusfunktion ist auf* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *streng monoton wachsend und die Kosinusfunktion auf* $[0, \pi]$ *streng monoton fallend.*

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus den Sätzen 53 und 56. Aus Satz 51 folgt

$$\exp(-it) = \overline{\exp it}, \qquad \exp(is + it) = \exp is \cdot \exp it,$$

also

$$\begin{aligned} \cos(-t) + i\sin(-t) &= \cos t - i \sin t, \\ \cos(s+t) + i\sin(s+t) &= (\cos s + i \sin s)(\cos t + i \sin t), \end{aligned}$$

und Aussage (i) ergibt sich durch Vergleich von Real- und Imaginärteil. Nebenbei ergibt sich

$$|\exp it| = 1, \qquad \sin^2 t + \cos^2 t = 1. \tag{6}$$

Wegen

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

folgt

$$\cos t = \frac{\exp it + \exp(-it)}{2}, \qquad \sin t = \frac{\exp it - \exp(-it)}{2i},$$

und wir erhalten aus Satz 47 die absolut konvergenten alternierenden Reihenentwicklungen

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Die Absolutbeträge der Glieder sind streng monoton fallend, falls die Quotienten

$$\left|\frac{t^{2k}}{(2k)!}\right| : \left|\frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!}\right| = \frac{t^2}{2k(2k-1)}, \qquad \left|\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| : \left|\frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| = \frac{t^2}{2k(2k+1)}$$

kleiner als 1 sind. Dies gilt ab $k = 1$ für $|t| < \sqrt{1 \cdot 2}$ bzw. $|t| < \sqrt{2 \cdot 3}$ und ab $k = 2$ für $|t| < \sqrt{3 \cdot 4}$ bzw. $|t| < \sqrt{4 \cdot 5}$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 < \cos t < 1 &\quad \text{für } |t| < \sqrt{2}, \\ 0 < \sin t < t &\quad \text{für } 0 < t < \sqrt{6}, \\ \cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz hat cos im Intervall $\left]\sqrt{2}, 2\right[$ eine Nullstelle. Wir bezeichnen das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle von cos mit π. Wegen $\sin \frac{\pi}{2} > 0$ folgt

$$\exp \frac{\pi i}{2} = i, \qquad \exp\left(it + \frac{\pi i}{2}\right) = i \exp it, \tag{7}$$

und Aussage (ii) ist bewiesen.

Aus den Additionstheoremen folgt

$$\cos(s+t) - \cos(s-t) = -2 \sin s \, \sin t$$

und, mit der Substitution $u = s + t$, $v = s - t$,

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}.$$

Für $0 \le v < u \le 2$ ist dies negativ, also ist die Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend und definiert eine bijektive Abbildung

$$\cos : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to]0, 1] \, .$$

Auf dem selben Intervall ist die Sinusfunktion wegen (6) streng monoton wachsend, und zusammen mit Teil (ii) folgt Aussage (iv).

Die Werte der Funktion $f(t) = \exp it$ eingeschränkt auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ liegen auf dem Viertelkreisbogen

$$V = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 1, \, x > 0, \, y \ge 0\},$$

und die Abbildung $\mathrm{Re} : V \to]0, 1]$ ist umkehrbar. Wegen $\mathrm{Re} \circ f = \cos$ definiert f eine bijektive Abbildung

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to V,$$

und mit Hilfe von (7) sehen wir, dass f auch eine bijektive Abbildung

$$[0, 2\pi[\to \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$$

definiert. Ist $z \neq 0$ eine komplexe Zahl und setzen wir $r = |z|$, so liegt $\frac{z}{r}$ im Bild dieser Abbildung, und Aussage (iii) folgt. □

Aus dem Beweis folgt auch, dass für alle t gilt

$$|\sin t| \leq |t|.$$

Definition 37. *Der* Tangens *und der* Kotangens *einer reellen Zahl t sind definiert als*

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t},$$

falls der Nenner jeweils von Null verschieden ist.

Folgerung 24. *Es gilt*

$$\tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot t, \qquad \cot\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan t.$$

Die Tangensfunktion ist auf dem Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton wachsend, die Kotangensfunktion auf $]0, \pi[$ streng monoton fallend. Beide sind stetig auf ihrem Definitionsbereich, ungerade und haben den Wertebereich $\mathbb{R}$.

Auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ist die Sinusfunktion nämlich streng monoton wachsend und die Kosinusfunktion streng monoton fallend, also nach den Monotoniegesetzen die Tangensfunktion streng monoton wachsend und ihr Kehrwert streng monoton fallend. Nach dem Zwischensertsatz gibt es für jedes $d > 0$ ein $x \in \left]1, \frac{\pi}{2}\right[$, so dass $\cos x < \frac{1}{d}$, also $\tan x > d \sin 1$, und somit ist die Tangensfunktion nicht von oben beschränkt. Der Rest ist offensichtlich.

Definition 38. *Die Umkehrfunktionen der* Winkelfunktionen

$$\begin{array}{ll} \sin\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}, & \cos\Big|_{[0,\pi]}, \\ \tan\Big|_{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}, & \cot\Big|_{]0,\pi[} \end{array}$$

bezeichnet man als zyklometrische Funktionen

$$\arcsin, \quad \arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad \arctan, \quad \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

genannt Arkussinus*,* Arkuskosinus*,* Arkustangens *und* Arkuskotangens[12].

7.3 Grenzwerte von Funktionen

Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

[12]ursprünglich *arcus sinus, arcus cosinus, arcus tangentis, arcus cotangentis.*

ist an der Stelle 1 nicht definiert. Allerdings stimmt sie an allen anderen Stellen mit der stetigen Funktion

$$g(x) = x + 1$$

überein. Dieses Phänomen erfassen wir mit dem folgenden Begriff. Dabei seien wieder K und L vollständige Körper mit Absolutbetrag.

Definition 39. *Es sei $a \in K$ ein Häufungspunkt der Teilmenge $D \subseteq K$ und $f : D \to L$. Wir sagen, dass für x gegen a die Funktion f gegen die Zahl c konvergiert, abgekürzt*[13] $f(x) \to c$ $(x \to a)$, *wenn die Funktion*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in D \setminus \{a\}, \\ c, & \text{wenn } x = a \end{cases}$$

an der Stelle a stetig ist.

Beispiel. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{\exp z - 1}{z}.$$

Aus Folgerung 11 ergibt sich

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!},$$

wobei die entstehende Potenzreihe z. B. nach dem Vergleichskriterium für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, also nach Satz 53 auf ganz $\mathbb{C}$ eine stetige Funktion g darstellt. Es folgt

$$\frac{\exp z - 1}{z} \to 1 \qquad (z \to 0).$$

Dies gilt natürlich auch für die Einschränkung auf die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\triangleleft$

Satz 61. *Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(i) $f(x) \to c$ $(x \to a)$,

(ii) *Für jede Folge von Zahlen x_n in $D \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ gilt* $f(x_n) \to c$ $(n \to \infty)$,

[13] An Stelle von x kann auch eine andere Variable stehen.

(iii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D \setminus \{a\}$ gilt*

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Gilt $f \to c$ und $f \to d$ $(x \to a)$, so ist $c = d$.

Beweis. In den Aussagen (ii) und (iii) können wir f durch die Funktion g aus der Definition sowie die Zahl c durch $g(a)$ ersetzen. Nun drückt Aussage (iii), in der wir $x = a$ nicht mehr auszuschließen brauchen, genau die Stetigkeit von g an der Stelle a aus. Aus Satz 54 folgt also, dass (i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Angenommen, es gilt (ii), und in D ist eine Folge x_n gegeben, die gegen a konvergiert. Wenn unendlich viele Glieder von a verschieden sind, so bilden sie eine Teilfolge x_{n_k} in $D \setminus \{a\}$, für die nach (ii) gilt $g(x_{n_k}) \to c$ $(k \to \infty)$. Natürlich folgt dann $g(x_n) \to c$ $(n \to \infty)$, und letzteres gilt auch, wenn nur endlich viele Glieder von a verschieden sind. Mit Satz 54 folgt Aussage (iii).

Angenommen, es gilt $f(x) \to c$ und $f(x) \to d$ $(x \to a)$, wobei $c \neq d$. Wir setzen $\varepsilon = \frac{|c-d|}{2}$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $x \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt

$$|c - f(x)| < \varepsilon, \qquad |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Da a ein Häufungspunkt von D ist, gibt es solche x tatsächlich, und mit der Dreiecksungleichung folgt $|c - d| < 2\varepsilon$ (Widerspruch). □

Definition 40. *Gilt $f(x) \to c$ $(x \to a)$, so nennen wir c den* Grenzwert der Funktion *f an der Stelle a, abgekürzt* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Beispiel. Für $b > 0$ hat die Funktion $f(r) = b^r$ den Definitionsbereich $\mathbb{Q}$. Wegen Folgerung 9 gilt

$$b^r = (\exp \ln b)^r = \exp(r \ln b).$$

Die Funktion $g(x) = \exp(x \ln b)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, also gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$b^r \to \exp(x \ln b) \qquad (r \to x).$$

Damit ist die folgende Definition gerechtfertigt. ◁

Definition 41. *Für reelle Zahlen $b > 0$ und x setzen wir*

$$b^x = \lim_{\substack{r \to x \\ r \in \mathbb{Q}}} b^r.$$

Es gelten die Potenzgesetze

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \qquad a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

(Übungsaufgabe).

Aus Satz 32(i) und Satz 61 erhalten wir

Folgerung 25. *Für eine Funktion f mit dem Zielbereich $\mathbb{C}$ gilt genau dann $f(x) \to c$ $(x \to a)$, wenn $\operatorname{Re} f(x) \to \operatorname{Re} c$ und $\operatorname{Im} f(x) \to \operatorname{Im} c$ $(x \to a)$.*

Beispiel. Aus

$$\frac{\exp it - 1}{it} \to 1 \qquad (t \to 0)$$

erhalten wir

$$\frac{\sin t}{t} \to 1, \qquad \frac{\cos t - 1}{t} \to 0 \qquad (t \to 0),$$

durch Einsetzen von $\exp it = \cos t + i \sin t$. ◁

Satz 62 (Einschließungskriterium)**.** *Es seien f, g und h Funktionen auf D mit Werten in $\mathbb{R}$, so dass für alle $x \in D \setminus \{a\}$ gilt*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Wenn $f(x) \to c$ und $h(x) \to c$ $(x \to a)$, so auch $g(x) \to c$ $(x \to a)$.

Beweis. Dies folgt vermittels Satz 61 aus Satz 27 oder kann direkt wie dort bewiesen werden. □

Beispiel. Aus Folgerung 23 erhalten wir, falls $s > 0$ und $s \neq 1$,

$$\min\{1, \tfrac{1}{s}\} \leq \frac{\ln s}{s - 1} \leq \max\{1, \tfrac{1}{s}\},$$

und es folgt

$$\frac{\ln s}{s - 1} \to 1 \qquad (s \to 1)$$

mit Hilfe von Aufgabe 47. ◁

Mit Hilfe von Satz 61 erhalten wir aus den Sätzen 17, 18 und 56:

Folgerung 26. *Es seien $f, g : D \to L$ und a ein Häufungspunkt von D. Wenn*

$$f(x) \to c, \qquad g(x) \to d \qquad (x \to a),$$

dann gilt

$$f(x) + g(x) \to c + d, \qquad f(x) \cdot g(x) \to c \cdot d \qquad (x \to a).$$

Ist außerdem $f(a) \neq 0$, so folgt auch

$$\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{c} \qquad (x \to a).$$

Ist schließlich $E \subseteq L$ und $h : L \to M$ stetig, so

$$h(f(x)) \to h(c) \qquad (x \to a),$$

falls die Verkettung existiert.

Beispiel. Nach den Potenzgesetzen gilt

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \big(\exp\ln(1+x)\big)^{\frac{1}{x}} = \exp\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Nun folgt

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \exp 1 = e \qquad (x \to 0)$$

wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion. $\triangleleft$

Eine weitere Spielart von Grenzwerten ist die Folgende.

Definition 42. *Es sei $f : D \to L$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ unbeschränkt von oben ist. Wir schreiben*

$$f(x) \to c \qquad (x \to \infty),$$

falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit der Eigenschaft $x \geq x_0$ gilt

$$|f(x) - c| < \varepsilon.$$

Analog definiert man die Aussage $f(x) \to c$ $(x \to -\infty)$.

Wie oben sieht man, dass es nur eine solche Zahl c geben kann, die man darum mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ bezeichnet.

Wenn $f(x) \to c$ $(x \to \infty)$, so hat offensichtlich auch die Folge $y_n = f(n)$ den Grenzwert c, aber die Umkehrung braucht nicht zu gelten, wie das Beispiel $f(x) = \sin(\pi x)$ zeigt. Man müsste schon wie in Satz 61 die Konvergenz von $f(x_n)$ für alle Folgen x_n mit dem uneigentlichen Grenzwert ∞ verlangen. Allerdings gilt:

Folgerung 27. *Für s, $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$ und $|b| < 1$ gilt*

$$x^s b^x \to 0 \quad (x \to \infty), \qquad \frac{(\ln y)^s}{y^t} \to 0 \quad (y \to \infty), \qquad z^t\,|\ln z|^s \to 0 \quad (z \to 0).$$

Da nämlich x^s für $x \geq 1$ monoton in s wächst, genügt es wegen des Einschließungskriteriums, dies für $s \in \mathbb{N}$ nachzuprüfen. Ist nun n die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft $n \geq x$, so gilt

$$|x^s b^x| \leq n^s |b|^{n-1},$$

und nach Satz 16 gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0, so dass die rechte Seite für $n \geq n_0$ kleiner als ε ist. Die erste Behauptung folgt, wenn wir im Sinne der Definition $x_0 = n_0$ setzen. Schreiben wir $y = \exp x$, so ist $y^{-t} = b^x$ mit $b = \exp(-t) < 1$, und die zweite Behauptung folgt. Die Substitution $z = \frac{1}{y}$ schließlich zeigt die dritte Behauptung.

Man kann auch uneigentliche Grenzwerte von Funktionen einführen:

Definition 43. *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von D. Wir sagen, dass f an der Stelle a den uneigentlichen Grenzwert ∞ hat, abgekürzt $f(x) \to \infty$ $(x \to a)$, wenn es für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ gilt $f(x) > c$. Analog definiert man die Aussagen $f(x) \to -\infty$ für $x \to a$ bzw. für $x \to \infty$.*

Es gilt eine ähnliche Aussage wie Satz 33. Daraus erhalten wir

Folgerung 28. *Für $s, t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$ und $b > 1$ gilt*

$$x^s b^x \to \infty \quad (x \to \infty), \quad y^t (\ln y)^s \to \infty \quad (y \to \infty), \quad \frac{|\ln z|^s}{z^t} \to \infty \quad (z \to 0).$$

Die Funktion $\operatorname{sgn} x$ hat an der Stelle 0 keinen Grenzwert, wohl aber einseitige Grenzwerte in dem folgenden Sinne.

Definition 44. *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$, und $a \in \mathbb{R}$. Wir setzen*

$$\begin{aligned} D_{<a} &= D \cap \left]-\infty, a\right[, & D_{>a} &= D \cap \left]a, \infty\right[, \\ f_{<a} &= f|_{D_{<a}}, & f_{>a} &= f|_{D_{>a}}, \end{aligned}$$

und definieren den linksseitigen bzw. rechtsseitigen Grenzwert als

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} f_{<a}(x), \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a} f_{>a}(x),$$

falls diese existieren (wozu a ein Häufungspunkt der jeweiligen Menge sein muss).

Wenn a Häufungspunkt von $D_{<a}$ und $D_{>a}$ ist, so existiert $\lim_{x \to a} f(x)$ offensichtlich genau dann, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte existieren und gleich sind. Außerdem ist

$$\lim_{x \to \pm 0} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

So gilt z. B.

$$\lim_{x \to \pm 0} \arctan \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Die obigen Existenzkriterien setzen voraus, dass man den potentiellen Grenzwert c bereits kennt. Nicht so das folgende:

Satz 63 (Monotoniekriterium)**.** *Es sei $f : D \to R$ monoton und beschränkt, und a sei Häufungspunkt von $D_{<a}$ bzw. $D_{>a}$. Dann existiert $\lim_{x \to a-0} f(x)$ bzw. $\lim_{x \to a+0} f(x)$.*

Beweis. Es sei z. B. f monoton wachsend und $c = \sup f_{<a}$, was wegen der Vollständigkeit von L existiert. Wegen der Beschränktheit ist $c < \infty$, wegen $D_{<a} \neq \varnothing$ ist $c > -\infty$. Ist nun $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $b \in D_{<a}$, so dass $f(b) > c - \varepsilon$, und wegen der Monotonie folgt $c - \varepsilon < f(x) \leq c < c + \varepsilon$ für $b < x < a$. □

Das folgende Kriterium kommt ohne die Voraussetzung der Monotonie aus.

Satz 64 (Cauchy-Kriterium). *Es sei a ein Häufungspunkt von $D \subseteq K$. Eine Funktion $f : D \to L$ hat genau dann eine Grenzwert an der Stelle a, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x und y in $D \setminus \{a\}$ gilt:*

$$|x - a| < \delta \quad \wedge \quad |y - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Beweis. Gilt $f(x) \to c \ (x \to a)$, so folgt die Cauchy-Bedingung aus

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - c| + |c - f(y)|.$$

Umgekehrt sei die Cauchy-Bedingung erfüllt. Es seien x_n und y_n Folgen in $D \setminus \{a\}$, so dass $x_n \to a$ und $y_n \to a \ (n \to \infty)$, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann liefert die besagte Bedingung ein δ, und zu diesem gibt es ein n_0, so dass für $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ gilt $|x_m - a| < \delta$ und $|y_n - a| < \delta$. Für diese m und n folgt also $|f(x_m) - f(y_n)| < \varepsilon$. Wir können das im Fall $y_n = x_n$ anwenden und sehen, dass $f(x_n)$ eine Cauchyfolge ist, die wegen der Vollständigkeit von L einen Grenzwert c hat. Andererseits sehen wir, dass für eine zweite Folge y_n wie oben die Folge $f(x_n) - f(y_n)$ eine Nullfolge ist, so dass auch $f(y_n) \to c \ (n \to \infty)$. Nach Satz 61 folgt dann, dass $f(x) \to c \ (x \to a)$. □

7.4 Gleichmäßige Stetigkeit

Das Cauchy-Kriterium gibt an, wann sich eine Funktion $f : D \to L$ in einem Häufungspunkt von D definieren lässt, so dass die entstehende Funktion dort stetig ist. Wir bezeichnen die Menge der Häufungspunkte mit D' und nennen $\bar{D} = D \cup D'$ den *Abschluss* von D. Ist es möglich, f zu einer Funktion g auf $\bar{D}$ fortzusetzen, die in jedem Punkt stetig ist? Dazu ist offensichtlich notwendig, dass f selbst stetig ist, aber das genügt im Allgemeinen nicht.

Definition 45. *Eine Funktion $f : D \to L$ heißt* gleichmäßig stetig, *wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x, y in D gilt*

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Offenbar ist jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig und jede gleichmäßig stetige Funktion stetig.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $D =]0, \infty]$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Ist $x = 2y > 0$, so ist $|x - y| = \frac{x}{2}$ und $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{x}$. Geben wir $\varepsilon = 1$ vor, so gibt es kein geeignetes δ, denn wir finden immer $x \in]0, 2\delta[$, so dass $\frac{1}{x} \geq 1$. $\triangleleft$

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $[0, \infty[$ gleichmäßig stetig (aber bekanntlich nicht Lipschitz-stetig): Ist $\varepsilon > 0$, so gilt

$$|x - y| < \varepsilon^2 \quad \Longrightarrow \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon,$$

denn

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leq |\sqrt{x} + \sqrt{y}||\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |x - y|.$$

Satz 65. *Ist die Funktion $f : D \to L$ stetig und der Definitionsbereich D abgeschlossen und beschränkt, so ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ Elemente x und y von D esistieren, so dass $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Für $\delta = \frac{1}{n}$ wählen wir solche Elemente x_n und y_n. Auf Grund der Beschränktheit von D hat die Folge x_n nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt a, der wegen der Abgeschlossenheit in D liegt. Nach Satz 35 gibt es also eine Teilfolge x_{n_k}, die gegen a konvergiert. Wegen $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ist $x_n - y_n$ eine Nullfolge, also auch $y_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$. Da f stetig ist, folgt

$$f(x_{n_k}) \to a, \qquad g(x_{n_k}) \to a \qquad (k \to \infty),$$

so dass

$$f(x_{n_k}) - g(x_{n_k}) \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

(Widerspruch). $\square$

Satz 66. *Ist $f : D \to L$ gleichmäßig stetig, so gibt es genau eine stetige Fortsetzung $g : \bar{D} \to L$, und diese ist ebenfalls gleichmäßig stetig.*

Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle Elemente x, y von D gilt

$$|x - y| < 3\delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ist nun $a \in \bar{D}$, so folgt für alle x und y mit $|x - a| < \delta$ und $|y - a| < \delta$, dass $|x - y| < 2\delta$ und somit $f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ist also a ein Häufungspunkt, so existiert $\lim_{x \to a} f(x)$ nach dem Cauchykriterium, andernfalls ist $f(a)$ bereits definiert. In jedem Fall ist g eindeutig bestimmt.

Es bleibt die gleichmäßige Stetigkeit von g zu zeigen. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ wie oben bestimmt. Sind a, b Elemente von $\bar{D}$, so gibt es nach Definition von g ein $\eta > 0$, so dass für alle x und y in D gilt

$$\begin{aligned} |x-a| < \eta \quad &\Longrightarrow \quad |f(x) - g(a)| < \varepsilon, \\ |y-b| < \eta \quad &\Longrightarrow \quad |f(y) - g(b)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir annehmen können, dass $\eta \leq \delta$. Wegen $a, b \in \bar{D}$ gibt es solche x und y tatsächlich, und es gilt

$$|x-y| \leq |x-a| + |a-b| + |b-y| < \eta + \delta + \eta \leq 3\delta,$$

also

$$|g(a) - g(b)| \leq |g(a) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(b)| < 3\varepsilon. \qquad \square$$

Für beschränktes D hat eine Funktion $f : D \to L$ also genau dann eine stetige Fortsetzung auf $\bar{D}$, wenn sie gleichmäßig stetig ist. Für unbeschränktes D gilt das nicht, wie das Beispiel $f(x) = x^2$ auf $D =]0, \infty[$ zeigt.

8 Differentialrechnung

8.1 Definition und Berechnung der Ableitung

Wir betrachten einen vollständigen Körper K mit normiertem Absolutbetrag. Für uns kommen wieder nur $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ in Frage.

Definition 46. *Es sei $D \subseteq K$ und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Eine Funktion $f : D \to K$ heißt* differenzierbar *an der Stelle a, wenn der so genannte* Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

einen Grenzwert für $x \to a$ besitzt. Dieser heißt dann Ableitung *der Funktion f an der Stelle a, abgekürzt $f'(a)$.*

Dies bedeutet also, dass sich der auf $D \setminus \{a\}$ definierte Differenzenquotient zu einer Funktion f_1 auf D fortsetzen lässt, die an der Stelle a stetig ist. Wir erhalten somit folgende Umformulierung:

Eine Funktion $f : D \to K$ ist genau dann an der Stelle a differenzierbar, wenn es eine stetige Funktion f_1 auf D gibt, so dass für $x \in D$ gilt

$$f(x) = f(a) + f_1(a)(x - a),$$

und dann gilt $f'(a) = f_1(a)$.

Aus Satz 55 ergibt sich:

Folgerung 29. *Jede an einer Stelle differenzierbare Funktion ist dort stetig.*

Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} a^{k-1} \to n a^{n-1} \qquad (x \to a),$$

also hat die Funktion $f(x) = x^n$ an der Stelle a die Ableitung $f'(a) = na^{n-1}$. Des Weiteren ist für $a \neq 0$

$$\frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{a^n}}{x - a} = -\frac{1}{a^n x^n} \cdot \frac{x^n - a^n}{x - a} \to -n a^{-n-1} \qquad (x \to a),$$

also gilt die obige Aussage sogar für $n \in \mathbb{Z}$. $\triangleleft$

Beispiel. Nun sei $K = \mathbb{R}$, $a \in D = [0, \infty[$. Für $a > 0$ gilt

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \to \frac{1}{2\sqrt{a}} \qquad (x \to a),$$

also gilt obige Formel sogar für $n = \frac{1}{2}$. An der Stelle $a = 0$ existiert die Ableitung nicht. $\triangleleft$

Beispiel. Für $a > 0$ gilt nach Folgerung 26

$$\frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\ln \frac{x}{a}}{\frac{x}{a} - 1} \to \frac{1}{a} \qquad (x \to a)$$

also ist $\ln' a = \frac{1}{a}$. $\triangleleft$

Beispiel. Aus der Funktionalgleichung folgt, wenn wir $x = a + h$ schreiben,

$$\frac{\exp(a+h) - \exp a}{h} = \exp a \cdot \frac{\exp h - 1}{h} \to \exp a \qquad (h \to 0),$$

also ist $\exp' = \exp$. Dies gilt für $K = \mathbb{R}$ und auch $K = \mathbb{C}$. $\triangleleft$

Beispiel. Aus den Additionstheoremen folgt

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{\sin a\,(\cos h - 1) + \cos a\,\sin h}{h} \to \cos a \qquad (h \to 0),$$
$$\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \frac{\cos a\,(\cos h - 1) - \sin a\,\sin h}{h} \to -\sin a \qquad (h \to 0),$$

also ist $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$. $\triangleleft$

Satz 67. *Sind die Funktionen f und g an der Stelle a differenzierbar, so auch $f+g$, $f \cdot g$ und, falls $f(a) \neq 0$, die Funktion $\frac{1}{f}$. Es gilt*

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a) && \textit{(Summenregel)},\\
(f \cdot g)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a) && \textit{(Produktregel}^{14}\textit{)},\\
\left(\frac{1}{f}\right)'(a) &= -\frac{f'(a)}{f(a)^2}.
\end{aligned}$$

Beweis. Schreiben wir

$$f(x) = f(a) + f_1(x)(x-a), \qquad g(x) = g(a) + g_1(x)(x-a)$$

wie in der Definition, so folgt

$$\begin{aligned}
f(x) + g(x) &= f(a) + g(a) + \big(f_1(x) + g_1(x)\big)(x-a),\\
f(x) \cdot g(x) &= f(a) \cdot g(a)\\
&\qquad + \big(f_1(x)g(x) + f(x)g_1(x) + f_1(x)g_1(x)(x-a)\big)(x-a).
\end{aligned}$$

Im Fall $f(a) \neq 0$ ist wegen der Stetigkeit im Punkt a auch $f(x) \neq 0$ für x in einer Umgebung von a, und dort gilt

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} = -\frac{f(x) - f(a)}{f(x)f(a)} = -\frac{f_1(x)}{f(x)f(a)} \cdot (x-a).$$

Nun folgt die Behauptung mit der alternativen Definition. □

Folgerung 30. *In der Situation des Satzes gilt, falls $g(a) \neq 0$,*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} \qquad \textit{(Quotientenregel).}$$

Satz 68 (Kettenregel)**.** *Gegeben seien Funktionen $f : D \to K$ und $g : E \to K$, deren Verkettung existiert. Ist f an der Stelle a und g an der Stelle $f(a)$ differenzierbar, so ist $g \circ f$ an der Stelle a differenzierbar, und*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Beweis. Es sei $b = f(a)$. Schreiben wir wie in der Definition

$$f(x) = f(a) + f_1(x)(x-a), \qquad g(y) = g(b) + g_1(y)(y-b)$$

für $x \in D$ und $y \in E$, so erhalten wir wegen $f(x) \in E$

$$g(f(x)) = g(b) + g_1(f(x))\big(f(x) - f(a)\big) = g(b) + g_1(f(x))f_1(x)(x-a).$$

Die Funktion $g_1(f(x))f_1(x)$ ist nach den Sätzen 55 und 56 und Folgerung 29 an der Stelle a stetig und hat dort den gewünschten Wert. □

[14] auch Leibniz-Regel genannt

Beispiel. Für $s \in \mathbb{R}$ ist die Verkettung von $f(x) = s \ln x$ und $g(y) = \exp y$ gleich

$$g \circ f(x) = x^s.$$

Wegen $f'(a) = \frac{s}{a}$ und $g'(b) = \exp b$ erhalten wir für $a > 0$

$$(g \circ f)'(a) = \exp(s \ln a) \cdot \frac{s}{a} = sa^{s-1},$$

was unser erstes Beispiel verallgemeinert. $\triangleleft$

Satz 69. *Es sei $F : D \to K$ injektiv und an der Stelle a differenzierbar, wobei $f'(a) \neq 0$. Ist die Umkehrfunktion $g : E \to K$ an der Stelle $b = f(a)$ stetig, so ist sie an dieser Stelle differenzierbar, und*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Beweis. Wie in der Definition schreiben wir für $x \in D$

$$f(x) - f(a) = f_1(x)(x - a).$$

Da f injektiv ist, gilt für $y \in E$

$$y - b = f_1(g(y))\big(g(y) - g(b)\big).$$

Da g in b stetig ist, gilt dies nach Satz 56 auch für $f_1 \circ g$. Wegen

$$f_1(g(b)) = f_1(a) = f'(a) \neq 0$$

ist nach Satz 55 auch $\frac{1}{f_1 \circ g}$ in b stetig, und

$$g(y) - g(b) = \frac{1}{f_1(g(y))}(y - b).$$

Es folgt die Differenzierbarkeit und die Formel für $g'(b)$. $\square$

Beispiel. Die Umkehrfunktion von $f(x) = \sin x$ ist $g(y) = \arcsin y$. Wenn $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ und $b = \sin a$ ist, so ist $\cos a \geq 0$, also

$$g'(b) = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}. \qquad \triangleleft$$

Bemerkung. Aus $f'(a) \neq 0$ folgt nicht die Injektivität von f in einer Umgebung von a, wie das Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos \frac{\pi}{x}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

zeigt. Es ist nämlich

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\cos \pi n}{n^2} - \frac{\cos \pi(n+1)}{(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{n(n+1)} + (-1)^n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right).
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Die Stetigkeit von g an der Stelle b folgt nicht aus den anderen Bedingungen (siehe Aufgabe 60). Man kann sie durch Einschränkung von f erzwingen. Dazu wähle man $0 < \varepsilon < |f'(a)|$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $|x - a| < \delta$ gilt $|f_1(x) - f_1(a)| < \varepsilon$. Wir schränken f auf die Menge $D_0 = \{x \in D \bigm| |x - a| < \delta\}$ ein. Wegen

$$
f'(a)(x - a) = \big(f(x) - f(a)\big) - \big(f_1(x) - f_1(a)\big)(x - a),
$$

ist für $x \in D_0$

$$
|f'(a)||x - a| \leq |f(x) - f(a)| + \varepsilon|x - a|,
$$

das heißt

$$
|x - a| \leq \frac{|f(x) - f(a)|}{|f'(a)| - \varepsilon},
$$

also für y im Wertebereich von $f|_{D_0}$

$$
|g(y) - g(b)| \leq \frac{|y - b|}{|f'(a)| - \varepsilon}.
$$

Definition 47. *Eine Funktion f heißt differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man die Funktion f' ihre Ableitung.*

8.2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Definition 48. *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle a ein* lokales Maximum, *wenn $a \in D$ ist und es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für $x \in D$ gilt*

$$
|x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(a).
$$

Analog definiert man ein lokales Minimum. *Die Funktion hat an der Stelle a ein* lokales Extremum, *wenn sie dort ein lokales Minimum oder Maximum hat.*

Der folgende Satz ist nützlich bei der Bestimmung lokaler Extrema.

Satz 70. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle a differenzierbar. Hat f ein lokales Extremum an der Stelle a und ist a Häufungspunkt von $D_{<a}$ und von $D_{>a}$, so gilt $f'(a) = 0$.*

Beweis. Hat f an der Stelle a beispielsweise ein lokales Maximum, so ist der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ für $x \in D \cap \,]a-\delta, a[$ nicht positiv und für $x \in D \cap \,]a, a+\delta[$ nicht negativ, also nach Satz 26 und 61

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0, \qquad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

(Man bezeichnet dies auch als die einseitigen Ableitungen.) Da f an der Stelle a differenzierbar ist, stimmen diese Grenzwerte überein, und die Behauptung folgt. □

Satz 71 (Satz von Rolle)**.** *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{]a,b[}$ differenzierbar, wobei $a < b$. Ist $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $c \in \,]a, b[$, so dass $f'(c) = 0$.*

Beweis. Nach Satz 58 hat f ein Maximum und ein Minimum. Ist wenigstens eines von beiden verschieden von $f(a)$, so wird es in einem inneren Punkt c angenommen, und mit Satz 70 folgt $f'(c) = 0$. Andernfalls ist $\max f = \min f = f(a) = f(b)$, also ist f konstant. □

Der Satz gilt nicht für Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$, wie das Beispiel $f(x) = \exp ix$ auf $D = [0, 2\pi]$ zeigt.

Satz 72 (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Die Funktionen f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar, wobei $a < b$. Dann gibt es ein $c \in \,]a, b[$, so dass*

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c).$$

Natürlich ist dann
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$
falls die Nenner nicht verschwinden.

Beweis. Wir wenden den Satz von Rolle auf die Funktion

$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) - \big(g(b) - g(a)\big)\big(f(x) - f(a)\big)$$

an und beachten, dass $h(a) = h(b) = 0$ und

$$h'(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(x) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(x).$$ □

Im Spezialfall $g(x) = x$ erhalten wir:

Folgerung 31 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Unter den Bedingungen des Satzes gibt es ein $c \in \,]a,b[$, so dass*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dies gilt sinngemäß auch für $b < a$. Man kann beide Fälle mit einer alternativen Formulierung erfassen. Dazu brauchen wir folgenden Begriff.

Definition 49. *Wir nennen a einen* inneren Punkt *der Teilmenge M eines Körpers K mit Absolutbetrag, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle Punkte x von K mit der Eigenschaft $|x - a| < \delta$ in M liegen. Die Teilmenge der inneren Punkte bezeichnen wir mit $\mathring{M}$.*

Offensichtlich ist eine Teilmenge von K genau dann offen, wenn sie nur innere Punkte hat.

Folgerung 32. *Es sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und in jedem inneren Punkt differenzierbar. Dann gibt es für $a \in I$ und $h \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $a + h \in I$ ein $\vartheta \in \,]0,1[$, so dass*

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \vartheta h)h.$$

Man zeigt dies durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Funktion $g(t) = f(a + th)$ auf $[0, 1]$.

Folgerung 33. *Unter den Bedingungen von Folgerung 32 ist f genau dann Lipschitz-stetig, wenn f' beschränkt ist.*

Ist nämlich d eine obere Schranke von $|f'|$, so gibt es nach dem Mittelwertsatz zwischen beliebigen Punkten a und b in I ein c, so dass

$$|f(a) - f(b)| = |f'(c)||b - a| \le d|b - a|.$$

Ist umgekehrt d eine Lipschitz-Konstante, so gilt für innere Punkte a und beliebige Punkte $x \ne a$ in I

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| \le d,$$

und durch Grenzübergang $x \to a$ ergibt sich $|f'(a)| \le d$.

Beispiel. In Aufgabe 53(c) ist ohne Benutzung von Ableitungen zu zeigen, dass die Funktion $f(x) = x^s \cos \frac{\pi}{x}$ für $s < 2$ nicht Lipschitz-stetig ist. Wegen

$$f'(x) = x^{s-2}\left(\pi \sin \frac{\pi}{x} + sx \cos \frac{\pi}{x}\right)$$

sieht man, dass f genau für $s \ge 2$ Lipschitz-stetig ist. $\triangleleft$

Folgerung 34. *Unter den Bedingungen von Folgerung 32 ist f genau dann konstant, wenn für alle inneren Punkte x von I gilt $f'(x) = 0$.*

Manchmal möchte man die Operation der Differentiation umkehren.

Definition 50. *Eine differenzierbare Funktion F auf einem Intervall I heißt* Stammfunktion *der Funktion f, wenn für alle $x \in I$ gilt $F'(x) = f(x)$.*

Wir werden im Rahmen der Integralrechnung näher darauf eingehen, wie man F findet. Aus der vorigen Folgerung erhalten wir schon jetzt:

Folgerung 35. *Sind F und G Stammfunktionen der Funktion f, so gibt es eine Zahl C derart, dass $G(x) = F(x) + C$ für alle $x \in I$.*

Das Monotonieverhalten differenzierbarer Funktionen lässt sich leicht beschreiben.

Folgerung 36. *Unter den Bedingungen von Folgerung 32 ist f genau dann monoton wachsend, wenn für alle inneren Punkte x gilt $f'(x) \geq 0$, und f ist streng monoton wachsend, wenn darüber hinaus f' auf keinem offenen Teilintervall verschwindet.*

Ist nämlich f monoton wachsend, so sind die Differenzenquotienten nichtnegativ, und dies gilt nach Satz 26 und 61 auch für die Ableitung. Die Umkehrung folgt aus dem Mittelwertsatz. Die Funktion ist nach Folgerung 34 genau dann konstant auf einem Teilintervall, wenn die Ableitung auf seinem Inneren verschwindet.

Aus der letzten Folgerung ergibt sich sofort:

Folgerung 37. *Unter den Bedingungen von Folgerung 32 sei $a \in I$. Gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f'(x) \geq 0$ für $x \in I \cap \,]a-\delta, a[$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \in I \cap \,]a, a+\delta[$, so hat f an der Stelle a ein lokales Maximum.*

Wir untersuchen nun Grenzwerte von Quotienten, bei denen die Rechenregeln versagen.

Satz 73 (Regel von de l'Hospital im Fall $\frac{0}{0}$)**.** *Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf $]a, b[$, es sei $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ $(x \to a)$, und für $x \in \,]a, b[$ sei $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$. Wenn*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to d \qquad (x \to a),$$

so auch

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to d \qquad (x \to a).$$

Beweis. Wir setzen f und g durch $f(a) = g(a) = 0$ stetig fort. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in \left]a, a+\delta\right[$ gilt

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - d\right| < \varepsilon.$$

Ist nun $x \in \left]a, a+\delta\right[$, so gibt es nach Satz 72 ein $z \in \left]a, x\right[$, so dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}. \qquad \square$$

Satz 74 (Regel von de l'Hospital im Fall $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf $\left]a, b\right[$, es sei $\frac{1}{f(x)} \to 0$ und $\frac{1}{g(x)} \to 0$ $(x \to a)$, und für $x \in \left]a, b\right[$ sei $g'(x) \neq 0$. Wenn*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to d \qquad (x \to a),$$

so auch

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to d \qquad (x \to a).$$

Beweis. Es seien ε und δ wie im vorigen Beweis. Da keine Werte an der Stelle a existieren, betrachten wir statt dessen einen Punkt $y \in \left]a, a+\delta\right[$. Selbst jetzt erhalten wir nur

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} h(x)$$

mit einem Korrekturfaktor

$$h(x) = \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}.$$

Aus den Annahmen über f und g folgt, dass $h(x) \to 1$ $(x \to a)$, also gibt es ein $\eta > 0$, so dass $|h(x) - 1| < \varepsilon$ für $x \in \left]a, a+\eta\right[$. Nach Satz 72 gibt es ein $z \in \left]x, y\right[$, so dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} h(x)$$

also gilt für $x \in \left]a, a+\eta\right[$ nach der Dreiecksungleichung

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - d\right| \leq \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - d\right| |h(x)| + |d||h(x) - 1| < \varepsilon(1+\varepsilon) + |d|\varepsilon. \qquad \square$$

Folgerung 38. *Die Regeln von de l'Hospital gelten auch für $x \to \infty$.*

Mit den Bezeichnungen $f_1(x) = f(\frac{1}{x})$ und $g_1(x) = g(\frac{1}{x})$ ist nämlich $f_1'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})$ und somit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{f_1(y)}{g_1(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{f_1'(y)}{g_1'(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Bemerkung 1.*Die Regeln von de l'Hospital gelten natürlich sinngemäß für linksseitige Grenzwerte und, indem man beides zusammenfügt, auch für beidseitige Grenzwerte. Letzteres kann man auch direkt mit Hilfe von Folgerung 32 zeigen.
Bemerkung 2. In Satz 74 ist wegen $\frac{1}{g(x)} \to 0$ automatisch $g(x) \neq g(y)$ für festes y und alle x nahe bei a. Daraus folgt aber nicht $g'(z) \neq 0$, denn f' und g' könnten gleichzeitig verschwinden.

Die Monotonie der Ableitung hängt eng mit folgendem Begriff zusammen.

Definition 51. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* konvex*, wenn für alle x, y und z in D gilt*

$$(z - y)f(x) + (x - z)f(y) + (y - x)f(z) \geq 0.$$

Sie heißt konkav*, wenn immer die umgekehrte Ungleichung gilt.*

Die obige Ungleichung ist im Fall $x < y < z$ äquivalent zu jeder der beiden Ungleichungen

$$f(z) \geq \frac{(y - z)f(x) + (z - x)f(y)}{y - x}, \qquad f(x) \geq \frac{(z - x)f(y) + (x - y)f(z)}{z - y} \tag{8}$$

und auch zu der Ungleichung

$$f(y) \leq \frac{(z - y)f(x) + (y - x)f(z)}{z - x}, \tag{9}$$

welche sich auch in der Form

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \tag{10}$$

und

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \tag{11}$$

schreiben lassen.

Satz. *Unter den Bedingungen von Folgerung 32 sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist konvex.*

(ii) *f' ist monoton wachsend.*

(iii) *Für alle $a \in \mathring{I}$ und alle $x \in I$ gilt*

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Beweis. Angenommen, es gilt Aussage (i). Wenden wir Ungleichung (11) auf $a < x < b$ und $x < b < y$ an, so erhalten wir wegen der Transitivität

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(b)}{y-b},$$

und für $a, b \in \mathring{I}$ folgt wegen der Differenzierbarkeit $f'(a) \leq f'(b)$, also Aussage (ii). Wenden wir hingegen die linke Ungleichung in (10) auf $a < y < z$ und die rechte auf $x < y < a$ an und bilden die Grenzwerte für $y \to a+0$ bzw. $y \to a-0$, so folgt

$$f'(a) \leq \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, \qquad \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq f'(a),$$

also Aussage (iii). Umgekehrt folgt aus den beiden letzten Ungleichungen wegen der Transitivität die Ungleichung (11) für $x < a < z$, also Aussage (i).

Für $x < y < z$ gibt es nach dem Mittelwertsatz $u \in]x, y[$ und $v \in]y, z[$, so dass

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(u), \qquad \frac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(v).$$

Ist also (ii) erfüllt, so folgt (i). □

Die Ungleichungen (8) und (9) besagen, dass der Graph von f unterhalb jeder Sehne und oberhalb ihrer Verlängerung (Sekante) verläuft, während (iii) besagt, dass der Graph oberhalb jeder Tangente verläuft. Durch Vorzeichenwechsel von f erhält man die analogen Aussagen für konkave Funktionen.

8.3 Höhere Ableitungen

Wir betrachten wieder Funktionen auf einer Teilmenge D eines Körpers K, der $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sein kann.

Definition 52. *Wir bezeichnen die Menge aller Funktionen $D \to K$ mit $F(D)$ und die Teilmenge der stetigen Funktionen mit $C(D)$. Ist jeder Punkt von D ein Häufungspunkt, so definieren wir die Menge $F^n(D)$ der n Mal differenzierbaren Funktionen und die Menge $C^n(D)$ der n Mal stetig differenzierbaren Funktionen rekursiv:*

$$\begin{aligned} F^0(D) &= F(D), \qquad C^0(D) = C(D), \\ F^{n+1}(D) &= \{f : D \to K \mid f \textit{ ist differenzierbar, } f' \in F^n(D)\}, \\ C^{n+1}(D) &= \{f : D \to K \mid f \textit{ ist differenzierbar, } f' \in C^n(D)\}. \end{aligned}$$

Wir definieren die $n$te Ableitung *$f^{(n)}$ einer Funktion $f \in F^n(D)$ rekursiv durch*

$$f^{(0)} = f, \qquad f^{(n+1)} = (f')^{(n)}.$$

Schließlich nennen wir die Elemente von

$$C^\infty(D) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(D)$$

unendlich oft[15] *differenzierbare Funktionen.*

Durch vollständige Induktion erhält man aus Folgerung 29:

Folgerung 39. *Für alle n gilt*

$$F^{n+1}(D) \subseteq C^n(D) \subseteq F^n(D).$$

Bemerkung. Durch vollständige Induktion nach m beweist man auch die Charakterisierungen

$$\begin{aligned} C^{n+m}(D) &= \{f \in C^m(D) \mid f^{(m)} \in C^n(D)\}, \\ F^{n+m}(D) &= \{f \in F^m(D) \mid f^{(m)} \in F^n(D)\} \end{aligned}$$

und für die Elemente dieser Mengen die Gleichung

$$f^{(m+n)} = (f^{(m)})^{(n)}$$

(Übungsaufgabe). Der Fall $n = 1$ zeigt, dass unsere Definition äquivalent zur landläufigen Definition ist.
Beispiel. Durch vollständige Induktion beweist man, dass für $s \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ die Funktionen

$$f(x) = x^s, \qquad g(x) = a^x$$

die höheren Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = s(s-1)\cdots(s-n+1)x^{s-n}, \qquad g^{(n)}(x) = (\ln a)^n a^x$$

haben und unendlich oft differenzierbar sind. Wegen $\ln' x = x^{-1}$ ist auch die Logarithmusfunktion unendlich oft differenzierbar. $\triangleleft$

Satz 75. *Sind f und g in $C^n(D)$, so auch die Funktionen $f+g$, $f \cdot g$ und, falls g auf D keine Nullstelle hat, $\frac{f}{g}$. Dies gilt analog für $F^n(D)$. Außerdem ist*

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, \qquad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

[15] richtiger wäre „beliebig oft“

Beweis. Wir führen nur den Fall $C^n(D)$ vor. Der Induktionsanfang folgt aus Satz 55. Angenommen, die erste Behauptung gilt für eine Zahl n, und wir betrachten nun Funktionen f und g in $C^{n+1}(D)$, was nach Folgerung 39 in $C^n(D)$ enthalten ist. Nach Satz 67 und Folgerung 30 gilt

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

und die rechten Seiten sind nach Induktionsvoraussetzung in $C^n(D)$. Damit folgt die Induktionsbehauptung laut Definition. Die Formeln beweist man ebenfalls durch vollständige Induktion, wobei man bei der Produktregel wie im Beweis der binomischen Formel vorgeht. □

Satz 76. (i) *Ist $f \in C^n(D)$, $g \in C^n(E)$ und ist der Wertebereich von f in E enthalten, so ist $g \circ f \in C^n(D)$.*

(ii) *Ist $f \in C^n(D)$ injektiv, $n \geq 1$, hat f' keine Nullstellen und ist die Umkehrfunktion $h : E \to K$ stetig, so ist $h \in C^n(E)$.*

Es gelten die analogen Aussagen für F^n statt C^n.

Beweis. **(i)** Der Induktionsanfang folgt aus Satz 56. Angenommen, $f, g \in C^{n+1}(D)$. Nach Satz 68 ist

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f',$$

und nach Satz 75, Folgerung 39 und der Induktionsvoraussetzung ist die rechte Seite in $C^n(D)$.
(ii) Der Induktionsanfang folgt aus Satz 69. Angenommen, $f \in C^{n+1}(D)$. Nach Satz 69 ist

$$h' = \frac{1}{f' \circ h},$$

und nach Satz 76(i), Satz 75, Folgerung 39 und der Induktionsvoraussetzung ist die rechte Seite in $C^n(D)$. □

Aus den uns bekannten unendlich oft differenzierbaren Funktionen können wir mit Hilfe der beiden vorangehenden Sätze weitere solche Funktionen erzeugen. Es gibt noch eine andere Quelle von unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Dazu zeigen wir zunächst:

Satz 77. *Die Ableitung einer Potenzreihe ist eine Potenzreihe mit dem selben Konvergenzradius, die durch gliedweise Differentiation entsteht.*

Beweis. Ist
$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$
mit dem Konvergenzradius r und ist $|c| < r$, so gilt nach Satz 52 für $|z-c|+|c| < r$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n,$$
wobei
$$b_n = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m c^{m-n}.$$
Wegen $f(c) = b_0$ folgt
$$\frac{f(z) - f(c)}{z - c} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-c)^{n-1},$$
so dass
$$f'(c) = b_1 = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m c^{m-1}.$$
Nach Satz 46 hat auch diese Potenzreihe den Konvergenzradius r. □

Durch wiederholte Anwendung erhalten wir:

Folgerung 40. *Eine analytische Funktion ist unendlich oft differenzierbar.*

8.4 Die Taylorsche Formel

Die Bedingung der Differenzierbarkeit einer Funktion $f : D \to K$ an der Stelle $a \in D$, nämlich
$$f(x) = f(a) + f_1(x)(x-a), \qquad f_1(x) \to f'(a) \qquad (x \to a),$$
können wir so umdeuten, dass f durch die lineare Funktion
$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$
angenähert wird, d. h.
$$f(x) = p(x) + r(x),$$
wobei das Restglied die Eigenschaft
$$\frac{r(x)}{x-a} = f_1(x) - f_1(a) \to 0 \qquad (x \to a)$$

hat. Die lineare Funktion p ist durch die Eigenschaften

$$p(a) = f(a), \qquad p'(a) = f'(a)$$

eindeutig bestimmt.

Ist nun $f \in F^n(D)$, so können wir eine ganzrationale Funktion

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$$

vom Grad höchstens n finden, die an der Stelle a die selben Ableitungen wie f bis zur Ordnung n hat. Wegen

$$p_n^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} c_k k(k-1)\cdots(k-m+1)(x-a)^{k-m}, \qquad p_n^{(m)}(a) = m!c_m$$

müssen wir nämlich

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

setzen, damit $p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ für k von 0 bis n gilt. Man nennt

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k$$

das $n$te *Taylor-Polynom* von f. Wenn wir nun

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$$

schreiben, wie groß ist dann das Restglied r_n? Wir geben die Antwort nur für $K = \mathbb{R}$.

Satz 78. *Es sei I ein Intervall, $f \in C^n(I)$ und $f|_{\mathring{I}} \in F^{n+1}(\mathring{I})$. Dann gibt es für jedes $x \in I$ ein z zwischen a und x, so dass*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(Restglied in der Form von Lagrange).

Beweis. Wir halten $x > a$ fest und betrachten die Hilfsfunktion

$$g(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k.$$

Dann gilt $g(x) = f(x)$, $g(a) = p_n(x)$ und

$$g'(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n.$$

Ist $h \in C([a,x])$ und $h|_{]a,x[}$ differenzierbar, so dass h' keine Nullstellen hat, so gibt es nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz ein $z \in \,]a,x[$, so dass

$$\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{g'(z)}{h'(z)},$$

und es folgt

$$r_n(x) = g(x) - g(a) = \frac{h(x)-h(a)}{h'(z)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Setzen wir $h(y) = (x-y)^{n+1}$, so gilt $h'(z) = -(n+1)(x-z)^n$, und die Behauptung folgt. Im Fall $x < a$ betrachtet man das Selbe auf $[x,a]$. □

Das Taylorpolynom p_1 vom Grad höchstens 1 ist die eingangs erwähnte lineare Funktion p. Damals genügte die Differenzierbarkeit von f an der Stelle a, um eine Aussage über das Restglied $r = r_1$ zu treffen. Satz 78 hingegen verlangt im Fall $n = 1$ die zweimalige Differenzierbarkeit in einer Umgebung von a und liefert dafür genauere Informationen über das Restglied. Es gibt aber eine Version des Satzes, die das frühere Ergebnis getreu verallgemeinert:

Satz 79. *Ist f auf einem Intervall $n-1$ Mal differenzierbar und $f^{(n-1)}$ an der Stelle a differenzierbar, so gilt*

$$\frac{r_n(x)}{(x-a)^n} \to 0 \qquad (x \to a).$$

Man sagt deshalb, dass die Funktion f an der gegebenen Stelle in $n$ter Ordnung mit ihrem Taylorpolynom übereinstimmt.

Beweis. Wir können $n \geq 2$ annehmen. Dann erfüllt die Funktion r_n wegen Folgerung 29 die Anforderungen von Satz 78 für $n-2$ statt n, wobei $r_n^{(k)}(a) = 0$ für $k \leq n$, und wir erhalten ein $z \in \mathring{I}$ mit der Eigenschaft $|z-a| < |x-a|$, so dass

$$r_n(x) = \frac{r_n^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

Es folgt

$$\left|\frac{r_n(x)}{(x-a)^n}\right| = \left|\frac{r_n^{(n-1)}(z)}{x-a}\right| < \left|\frac{r_n^{(n-1)}(z)}{z-a}\right|.$$

Wegen

$$\frac{r_n^{(n-1)}(z)}{z-a} = \frac{r_n^{(n-1)}(z) - r_n^{(n-1)}(a)}{z-a} \to r_n^{(n)}(a) = 0 \qquad (z \to 0)$$

folgt die Behauptung. □

Man kann die Taylorsche Formel zum Einen zur Berechnung von Grenzwerten benutzen, zum Anderen um festzustellen, ob an einem stationären Punkt ein lokales Extremum vorliegt:

Satz 80. *Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei die Funktion f auf einem Intervall $n-1$ Mal differenzierbar und $f^{(n-1)}$ an der Stelle a differenzierbar, und es gelte*

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \qquad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Dann hat f an der Stelle a

(i) *kein lokales Extremum, falls n ungerade,*

(ii) *ein lokales Maximum, falls n gerade und $f^{(n)}(a) < 0$,*

(iii) *ein lokales Minimum, falls n gerade und $f^{(n)}(a) > 0$.*

Beweis. Die Taylorsche Formel vereinfacht sich zu

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x),$$

und es folgt

$$f(x) - f(a) = (x-a)^n \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} \right).$$

Zu $\varepsilon = \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}$ gibt es nach Satz 79 ein $\delta > 0$, so dass die Klammer auf der rechten Seite für $|x-a| < \delta$ konstantes Vorzeichen hat. □

Beispiel. Ist f eine analytische Funktion, so ist p_n die $n$te Partialsumme der Potenzreihe mit Zentrum a:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k, \qquad p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k.$$

Die ist z. B. auf die Funktionen exp, sin und cos anwendbar. ◁

Die im vorigen Abschnitt berechneten Beispiele von höheren Ableitungen versetzen uns in die Lage, weitere Taylor-Polnome und Restglieder zu bestimmen:
Beispiel. Ist $f(x) = \ln(1+x)$, so gilt

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$$

für $k \geq 1$ und somit

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \qquad r_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+z}\right)^{n+1}$$

für ein z zwischen 0 und x. $\triangleleft$
Beispiel. Ist $s \in \mathbb{R}$ und $f(x) = (1+x)^s$, so gilt

$$f^{(k)}(x) = s(s-1)\cdots(s-k+1)(1+x)^{s-k}$$

und somit

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} x^k, \qquad r_n(x) = \binom{s}{n+1}(1+z)^{s-n-1}x^{n+1}$$

für ein z zwischen 0 und x. $\triangleleft$

Definition 53. *Die* Taylor-Reihe *einer auf einem Intervall I unendlich oft differenzierbaren Funktion f an der Stelle $a \in I$ ist die Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Was ist der Konvergenzradius dieser Reihe, welche Funktion stellt sie dar? Im ersten Beispiel erhalten wir die schon bekannten Reihen aus Satz 47 und dem Beweis von Satz 60 mit dem Konvergenzradius ∞. In den letzten beiden Beispielen ist der Konvergenzradius nach Satz 17 und Aufgabe 41 gleich 1. Es kommt auch vor, dass die Taylor-Reihe den Konvergenzradius 0 hat.

Die Taylor-Reihe von f konvergiert natürlich genau dann gegen f, wenn das Restglied gegen 0 konvergiert. Im Beispiel $f(x) = \ln(1+x)$ haben wir

$$|r_n(x)| < \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}, & \text{wenn } x > 0, \\ \frac{1}{n+1}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1}, & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

Für $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ folgt also

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

(*Logarithmusreihe*), und für $x = 1$ erhalten wir nebenbei den Wert der alternierenden harmonischen Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Auch im Beispiel $f(x) = (1 + x)^s$ folgt $r_n(x) \to 0 \ \ (n \to \infty)$ und somit

$$(1 + x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n$$

(*Binomialreihe*) nur für $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Was passiert im Rest des Konvergenzintervalls?

Satz 81. *In der Situation von Satz 78 gibt es ein w zwischen a und x, so dass*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(w)}{n!}(x - a)(x - w)^n$$

(Restglied in der Form von Cauchy).

Der Beweis ist identisch mit dem von Satz 78 außer dass man diesmal die Funktion $h(y) = x - y$ wählt, also den gewöhnlichen Mittelwertsatz anwendet.

Beispiel. Schreiben wir das Restglied für $f(x) = \ln(1 + x)$ in der Form von Cauchy, so erhalten wir

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n}{(1 + w)^{n+1}} x(x - w)^n.$$

Für $-1 < x < 0$ ist $x < w < 0$, also $w(x + 1) < 0$. Durch Addition von $x - w$ auf beiden Seiten erhalten wir $x(1 + w) < x - w$, also

$$\frac{x - w}{1 + w} > x, \qquad \left| \frac{x - w}{1 + w} \right| < |x|$$

und schließlich

$$r_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{1 + z} < \frac{|x|^{n+1}}{1 + x},$$

so dass auch hier gilt $r_n(x) \to 0 \ \ (n \to \infty)$. Die Logarithmusreihe konvergiert also für $-1 < x \leq 1$ gegen $\ln(1 + x)$. Ähnliches kann man auch für die Binomialreihe zeigen. ◁

Beispiel. Es scheint zunächst unmöglich, die höheren Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \arctan x$$

direkt zu berechnen. Wir können aber die in der Präsenzaufgabe 44 bestimmte erste Ableitung für $|x| < 1$ als geometrische Reihe schreiben:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n.$$

Die für $|x| \leq 1$ konvergente Potenzreihe

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

ist offensichtlich auf $]-1, 1[$ eine Stammfunktion von f, das heißt, es gilt $f' = g'$. Wegen $f(0) = 0 = g(0)$ zeigt Folgerung 50, dass $f = g$ ist, und dies gilt auch an den Intervallgrenzen wegen der Einschließung aus dem Beweis des Leibniz-Kriteriums und der Stetigkeit der beteiligten Funktionen. Wir erhalten dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

durch Einsetzen von $x = 1$. $\triangleleft$

Beispiel. Dieser Trick hilft auch bei der Funktion

$$f(x) = \arcsin x$$

weiter. Für $|x| < 1$ gilt nämlich

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n},$$

wobei rekursiv

$$0!! = (-1)!! = 1, \qquad (n+2)!! = n!! \cdot (n+2)$$

definiert wird, und man findet

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ebenfalls für $|x| < 1$. $\triangleleft$

9 Integralrechnung

9.1 Das Riemannsche Integral

Verschiedenste geometrische und physikalische Probleme, etwa die Bestimmung der von einer Kurve umschlossenen Fläche oder der Masse bei gegebener Dichteverteilung, lassen sich durch ein und den selben mathematischen Begriff des Integrals einer Funktion modellieren. Grob gesprochen geht es darum, den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen und der Abszissenachse zu bestimmen.

Definition 54. *Unter einer* Teilung *eines beschränkten abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ verstehen wir eine Teilmenge $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$, so dass*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nennen wir

$$\overline{S}(f, T) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}),$$
$$\underline{S}(f, T) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1})$$

die Riemannsche Ober- *bzw.* Untersumme *von f bezüglich T.*

Lemma 2. (i) *Für beliebige Teilungen T_1 und T_2 gilt*

$$\underline{S}(f, T_1) \leq \overline{S}(f, T_2).$$

(ii) *Für Teilungen $T \subseteq T'$ gilt*

$$\underline{S}(f, T) \leq \underline{S}(f, T'), \qquad \overline{S}(f, T') \leq \overline{S}(f, T').$$

Beweis. Ungleichung (i) im Fall $T_1 = T_2 = T$ folgt aus der Tatsache

$$\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \leq \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

(ii) folgt daraus, dass für $x_{k-1} < z < x_k$ gilt

$$\begin{aligned} \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}) &= \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot \big((x_k - z) + (z - x_{k-1})\big) \\ &\leq \inf_{[x_{k-1}, z]} f \cdot (z - x_{k-1}) + \inf_{[z, x_k]} f \cdot (x_k - z), \end{aligned}$$

und der analogen Ungleichung für obere Grenzen. Nun folgt der allgemeine Fall von (i) mittels Transitivität aus dem bewiesenen Spezialfall für $T = T_1 \cup T_2$ und aus (ii). $\square$

Definition 55. *Für eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißen die Zahlen*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\overline{S}(f,T) \mid T \text{ ist Teilung von } [a,b]\},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\underline{S}(f,T) \mid T \text{ ist Teilung von } [a,b]\}$$

das Riemannsche Ober- *bzw.* Unterintegral *von f über das Intervall $[a,b]$. Die Funktikon f heißt* integrierbar[16]*, falls beide übereinstimmen, und der gemeinsame Wert, abgekürzt*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

heißt Integral *von f über $[a,b]$.*

Bemerkung. Nach Lemma 2 und Satz 24 existieren Ober- und Unterintegral, und es gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Bemerkung. Die Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Teilung T gibt, so dass $\overline{S}(f,T) - \underline{S}(f,T) < \varepsilon$.

Bemerkung. Würden wir in der Definition $[x_{k-1}, x_k]$ durch $]x_{k-1}, x_k[$ ersetzen, so würden sich die Werte von Ober- und Unterintegral nicht ändern.

Beispiel. Die Riemannschen Summen der Funktion $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $[0,1]$ bezüglich der äquidistanten Teilung

$$T_n = \left\{0,\ \tfrac{1}{n},\ \tfrac{2}{n},\ \ldots,\ \tfrac{n-1}{n},\ 1\right\}$$

sind

$$\overline{S}(f,T_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^3 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3, \qquad \underline{S}(f,T_n) = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^3 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} (k-1)^3.$$

[16] im Riemannschen Sinne

Man zeigt durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,T_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,T_n) = \frac{1}{4}.$$

Somit ist f integrierbar, und

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}. \qquad \triangleleft$$

Beispiel. Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Da jedes Intervall positiver Länge sowohl rationale als auch irrationale Zahlen enthält, ist

$$\sup_{[x_{k-1},x_k]} f = 1, \qquad \inf_{[x_{k-1},x_k]} f = 0,$$

so dass

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b-a, \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0.$$

Somit f ist nicht integrierbar. $\triangleleft$

Wir geben nun zwei allgemeine Kriterien für die Integrierbarkeit an.

Satz 82. *Jede stetige Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall ist integrierbar.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Satz 65 ist f gleichmäßig stetig, es gibt also ein $\delta > 0$, so dass für x und y aus $[a,b]$ mit der Eigenschaft $|x-y| < \delta$ gilt $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Ist nun T eine Teilung mit einer Feinheit kleiner als δ, so gilt dies insbesondere für x und y aus dem selben Teilintervall $[x_{k-1},x_k]$, so dass

$$\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \le \varepsilon.$$

Multiplizieren wir dies mit $x_k - x_{k-1}$ und summieren über k, so erhalten wir

$$\overline{S}(f,T) - \underline{S}(f,T) \le \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b-a).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 83. *Jede beschränkte monotone Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall ist integrierbar.*

Beweis. Ist f beispielsweise monoton wachsend, so gilt

$$\inf_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_{k-1}), \qquad \sup_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_k).$$

Multiplizieren wir dies mit $x_k - x_{k-1}$ und summieren über k, so erhalten wir

$$\overline{S}(f,T) - \underline{S}(f,T) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)(x_k - x_{k-1}),$$

wobei alle Terme positiv sind. Hat T eine Feinheit kleiner als δ, so ist die rechte Seite beschränkt durch

$$\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\,\delta = \delta\big(f(x_n) - f(x_0)\big) = \delta\big(f(b) - f(a)\big).$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Unsere erste Rechenregel für Integrale ist die Additivität bezüglich des Integrationsintervalls.

Satz 84. *Es sei $a < b < c$. Eine beschränkte Funktion $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktionen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind, und in diesem Fall gilt*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Beweis. Ist T eine Teilung von $[a,b]$ und $T' = T \cup \{b\}$, so erhalten wir Teilungen $T_1 = T' \cap [a,b]$ und $T_2 = T' \cap [a,b]$ von $[a,b]$ bzw. $[b,c]$. Geht man umgekehrt von Teilungen T_1 von $[a,b]$ und T_2 von $[b,c]$ aus, so ist $T' = T_1 \cup T_2$ eine Teilung von $[a,c]$. In jedem Fall gilt

$$\overline{S}(f,T_1) + \overline{S}(f,T_2) = \overline{S}(f,T'), \qquad \underline{S}(f,T_1) + \underline{S}(f,T_2) = \underline{S}(f,T').$$

Bilden wir die unteren bzw. oberen Grenzen über alle Teilungen T_1, T_2 oder auch über alle Teilungen T, so folgt mit Lemma 2

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_b^c} f(x)\,dx, \qquad \underline{\int_a^c} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_b^c} f(x)\,dx.$$

Sind $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar, so stimmen die rechten Seiten überein, also auch die linken Seiten, das heißt, f ist integrierbar. Die Umkehrung wird klar, wenn man die beiden Gleichungen voneinander abzuziehen und bemerkt, dass die Differenz aus Oberintegral und Unterintegral nicht negativ ist. □

Folgerung 41. *Stückweise stetige Funktionen (d. h. Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen, in denen aber einseitige Grenzwerte existieren) und stückweise monotone beschränkte Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen sind integrierbar.*

Bisher musste die obere Integrationsgrenze größer als die untere sein.

Definition 56. *Für eine integrierbare Funktion f auf $[a, b]$ setzen wir*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dies ist die einzige Möglichkeit, damit gilt:

Folgerung 42. *Satz 84 gilt ohne die Voraussetzung $a < b < c$, wenn f auf dem größten vorkommenden Intervall integrierbar ist.*

Unsere Definition des Integrals ist nicht auf komplex- oder vektorwertige Funktionen anwendbar. Dem lässt sich abhelfen.

Definition 57. *Eine Menge $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ heißt Menge von Stützstellen für die Teilung $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ des Intervalls $[a, b]$, wenn*

$$x_0 \leq z_1 \leq x_1 \leq \ldots \leq z_n \leq x_n.$$

Ist f eine Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ mit Werten in einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$, so nennen wir

$$S(f, T, Z) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1})$$

die Riemannsche Summe *von f bezüglich T und Z.*

Satz 85. *Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Zahl $I \in \mathbb{R}$ gilt genau dann $\int_a^b f(x)\,dx = I$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede Teilung T von $[a, b]$ mit einer Feinheit kleiner als δ und für jede Menge Z von Stützstellen für T gilt*

$$|S(f, T, Z) - I| < \varepsilon.$$

Beweis. Angenommen, für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der besagten Eigenschaft, und es sei T eine Teilung, deren Feinheit kleiner als δ ist. Für jedes k gibt es ein $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$, so dass

$$f(z_k) > \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Dann ist $S(f,T,Z) > \overline{S}(f,T) - \varepsilon$ und somit $\overline{S}(f,T) < I + 2\varepsilon$. Ähnlich zeigt man, das $\underline{S}(f,T) > I - 2\varepsilon$. Da wir $\varepsilon > 0$ beliebig wählen können, folgt $\int_a^b f(x)\,dx = I$.

Umgekehrt sei $\int_a^b f(x)\,dx = I$, und es sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir halten eine Teilung T' fest, so dass

$$\overline{S}(f,T') < I + \varepsilon, \qquad \underline{S}(f,T') > I - \varepsilon,$$

und setzen $n' = |T'| - 1$. Nun sei T eine beliebige Teilung und Z eine Menge von Stützpunkten dafür. Liegt ein Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ von T innerhalb eines Teilintervalls $[x'_{l-1}, x'_l]$ von T', so gilt

$$\inf_{[x'_{l-1},x'_l]} f \le f(z_k) \le \sup_{[x'_{l-1},x'_l]} f.$$

Dies ist für höchstens n' Teilintervalle von T nicht erfüllt, vorausgesetzt, die Feinheit von T ist kleiner als eine Zahl

$$\delta < \min\{x'_l - x'_{l-1} \mid 1 \le l \le n'\}.$$

Für beliebige k und l gilt immer noch

$$\inf_{[x'_{l-1},x'_l]} f - d \le f(z_k) \le \sup_{[x'_{l-1},x'_l]} f + d,$$

wobei $d = \sup f - \inf f$. Multiplizieren wir dies mit den Längen der jeweiligen Intervalle $[x_{k-1}, x_k] \cap [x'_{l-1}, x'_l]$, so erhalten wir nach Summation

$$\underline{S}(f,T') - n'd\delta \le S(f,T,Z) \le \overline{S}(f,T') + n'd\delta.$$

Ist außerdem $\delta < \frac{\varepsilon}{n'd}$, so folgt $|S(f,T,Z) - I| < 2\varepsilon$. □

Definition 58. *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt integrierbar, wenn es eine Zahl $I \in \mathbb{C}$ gibt, die der Bedingung aus Satz 85 genügt, und in diesem Fall nennt man I das Integral von f über das Intervall $[a,b]$, abgekürzt $I = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Genauso kann man übrigens das Integral einer Funktion mit Werten in einem Vektorraum definieren, der bezüglich einer Norm vollständig ist. Man beachte, dass sich dieses Integral nicht mehr als (vorzeichenbehafteter) Flächeninhalt deuten lässt. Satz 85 zeigt, dass beide Definitionen kompatibel sind. Außerdem erhalten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung

Folgerung 43. *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktionen $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind, und dann gilt*

$$\operatorname{Re} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx, \qquad \operatorname{Im} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx.$$

Damit übertragen sich die Sätze 82 und 84 auf komplexwertige Funktionen. Man könnte sie aber auch direkt beweisen.

9.2 Eigenschaften des Integrals

Für das Integral gelten naheliegende Rechenregeln.

Satz 86. *Sind die Funktionen f, $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrierbar und ist $c \in \mathbb{C}$, so sind auch $f+g$, $c \cdot f$ und $|f|$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$$
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Beweis. Offensichtlich gilt für jede Teilung T von $[a,b]$ und jede Menge Z von Stützpunkten für T

$$S(f+g,T,Z) = S(f,T,Z) + S(g,T,Z)$$

(was für Ober- und Untersummen falsch gewesen wäre). Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}&\left|S(f+g,T,Z) - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx\right|\\ &\qquad\leq \left|S(f,T,Z) - \int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|S(g,T,Z) - \int_a^b g(x)\,dx\right|.\end{aligned}$$

Wegen der Integrierbarkeit von f und g finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass die rechte Seite kleiner als ε ist, wenn die Feinheit von T kleiner als δ ist. Somit folgt die Integrierbarkeit von $f+g$ und die erste Formel. Analog behandelt man cf.

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq |\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} f(y)| + |\operatorname{Im} f(x) - \operatorname{Im} f(y)|.$$

Bilden wir das Supremum über alle x, $y \in [a,b]$, so folgt wegen $|r-s| = \max\{r-s, s-r\}$ für reelle Zahlen r und s

$$\sup|f| - \inf|f| \leq |\sup \operatorname{Re} f - \inf \operatorname{Re} f| + |\sup \operatorname{Im} f - \inf \operatorname{Im} f|.$$

Das Selbe gilt für die Einschränkung von f auf ein Teilintervall von T, so dass

$$\overline{S}(|f|,T) - \underline{S}(|f|,T) \leq \big(\overline{S}(\operatorname{Re} f,T) - \underline{S}(\operatorname{Re} f,T)\big) + \big(\overline{S}(\operatorname{Re} f,T) - \underline{S}(\operatorname{Re} f,T)\big).$$

Ist also f integrierbar, so auch $|f|$. Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir eine Teilung T, so dass

$$\left|S(f,T,Z) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon, \qquad \left|S(|f|,T,Z) - \int_a^b |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon,$$

und folglich

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| - \varepsilon < |S(f,T,Z)|, \qquad S(|f|,T,Z) < \int_a^b |f(x)|\,dx + \varepsilon.$$

Die Anwendung der Dreiecksungleichung auf die Riemannschen Summen ergibt

$$|S(f,T,Z)| \leq S(|f|,T,Z).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die behauptete Ungleichung. $\square$

Für reellwertige Funktionen hat das Integral auch Monotonieeigenschaften.

Satz 87. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Ist f außerdem stetig und gibt es ein $c \in [a,b]$, so dass $f(c) > 0$, so gilt hier die strenge Ungleichung.

Beweis. Auf jedem Teilintervall einer Teilung T gilt

$$\sup_{[x_{k-1},x_k]} f \geq 0,$$

so das $\overline{S}(f,T) \geq 0$, und durch Bildung des Supremums folgt die erste Behauptung. Ist außerdem $f(c) = \varepsilon > 0$, so gibt es im Fall der Stetigkeit ein $\delta > 0$, so dass für x mit der Eigenschaft $|x - c| < \delta$ gilt $f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$. Definieren wir $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} & \text{für } |x-c| < \delta, \\ 0 & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

so ist $f - g \geq 0$, also nach dem Beweisenen $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx = \varepsilon\delta$. $\square$

Der folgende Begriff kommt häufig in Anwendungen vor.

Definition 59. *Der Mittelwert einer integrierbaren Funktion f auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ ist*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Satz 88 (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Sind f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und gilt $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so gibt es ein $c \in [a,b]$, so dass*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Für die Funktion $g(x) = x$ erhält man den gewöhnlichen Mittelwertsatz, der besagt, dass eine stetige Funktion ihren Mittelwert annimmt.

Beweis. Nach Satz 58 existieren $m = \min f$ und $M = \max f$, und aus Satz 87 folgt, dass

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Ist $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, so ist nach Satz 87 $g(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, und die Behauptung gilt für jedes c. Andernfalls liegt

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \Big/ \int_a^b g(x)\,dx$$

im Intervall $[m, M]$ und wird nach dem Zwischenwertsatz von f angenommen.

□

9.3 Unbestimmte Integrale

In gewissem Sinne ist die Integration die Umkehroperation der Differentiation.

Satz 89. *Es sei I ein Intervall positiver Länge, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in I$. Dann ist die durch*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

definierte Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und $F' = f$.

Beweis. Wir halten $x \in I$ fest. Ist $h \in \mathbb{R}$ derart, dass $x + h \in I$, so gilt nach Satz 84

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

also

$$F(x+h) - F(x) - hf(x) = \int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)dt.$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es wegen der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass für $|t - x| < \delta$ gilt $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Mit Satz 86, verallgemeinert auf den Fall $b < a$, und Satz 87 erhalten wir für $|h| < \delta$

$$|F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt \right| \leq |h|\varepsilon,$$

also für $0 < |h| < \delta$

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \to f(x) \qquad (h \to 0).$$ □

Nun wird die Definition 50 mit Leben erfüllt.

Folgerung 44. *Jede stetige Funktion besitzt mindestens eine Stammfunktion.*

Satz 90 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f, so gilt für Elemente a und b des Intervalls I*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Sind F und G zwei Stammfunktionen, so ist wegen Folgerung 35 $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. Es genügt also, den Satz für eine einzige Stammfunktion zu beweisen. Für die Stammfunktion aus Satz 89 ist die Behauptung aber offensichtlich. □

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^s$, die für $s \in \mathbb{N}$ auf der Menge $\mathbb{R}$, für $s \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und andernfalls auf $]0, \infty[$ definiert ist. Man prüft leicht nach, dass für $s \neq -1$ die Funktion $F(x) = \frac{x^{s+1}}{s+1}$ eine Stammfunktion von f ist, also gilt für $[a, b]$ im Definitionsbereich

$$\int_a^b x^s dx = \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{s+1}.$$

Im Fall $s = -1$ ist $\ln x$ eine Stammfunktion auf $]0, \infty[$ und $\ln(-x)$ eine Stammfunktion auf $]-\infty, 0[$. $\triangleleft$

Bemerkung. Man bezeichnet eine beliebige Stammfunktion der Funktion f mit dem Integralzeichen ohne Integrationsgrenzen und nennt dies das *unbestimmte Integral* von f, also

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

mit einer Konstanten C. Ist $F(x)$ durch einen umfangreichen Term gegeben, so vermeidet man das zweimalige Hinschreiben, indem man die Abkürzungen

$$F(b) - F(a) = F\Big|_a^b = \big[F\big]_a^b$$

vereinbart. Steht hier statt F ein Term $F(x)$, dann müsste man eigentlich $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ schreiben (besonders wenn weitere Variablen vorkommen).

Beispiel. Man findet oft die Angabe

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \text{für } x \neq 0,$$

aber eigentlich kann man auf den beiden Komponenten des Definitionsbereiches verschiedene Konstanten wählen. Haben a und b das selbe Vorzeichen, so gilt

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \big[\ln|x|\big]_a^b.$$

Indem man die Liste der bekannten Ableitungen umkehrt, erhält man außerdem

$$
\begin{aligned}
\int e^x dx &= e^x + C, \\
\int \sin x \, dx &= -\cos x + C, \\
\int \cos x \, dx &= \sin x + C, \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C \qquad \text{für } |x| < 1, \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \operatorname{arsinh} x + C, \\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C, \\
\int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C \qquad \text{für } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

usw. (Genaugenommen gilt die letzte Formel wieder nur auf jedem Teilintervall des Definitionsbereichs.) $\triangleleft$

9.4 Integrationstechniken

Mit Hilfe des Hauptsatzes lassen sich auch Ketten- und Produktregel der Differentiation in Aussagen über Stammfunktionen ummünzen.

Satz 91 (Substitutionsregel)**.** *Es sei f auf einem Intervall I stetig und $g : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy.$$

Beweis. Es sei F eine Stammfunktion von f. Nach der Kettenregel ist

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

also nach dem Hauptsatz

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = F \circ g\Big|_a^b = F\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy. \qquad \square$$

Ist $g(x)$ durch einen Term gegeben, so wird traditionell die Abbildung g nicht erwähnt, sondern man sagt, dass y in $f(y)$ durch diesen Term ersetzt (substituiert) wird. In der Leibnizschen Schreibweise ist dann $g'(x) = \frac{dy}{dx}$, und man schreibt formal $dy = g'(x)dx$, was man für dy substituieren kann. Auf diese Weise ergibt sich die Substitutionsregel von selbst, wenngleich das kein Beweis ist.

Beispiel. Wir wollen $\int_a^b c^x dx$ berechnen, wobei $c > 0$. Substituieren wir

$$y = x \ln c, \qquad \frac{dy}{dx} = \ln c,$$

so ist der Integrand $c^x = e^y$. Die (konstante) Ableitung kommt zwar in unserem Integral nicht vor, aber für $c \neq 1$ ist $dx = \frac{1}{\ln c} dy$, so dass

$$\int_a^b c^x dx = \frac{1}{\ln c} \int_{a \ln c}^{b \ln c} e^y dy = \left. \frac{e^y}{\ln c} \right|_{a \ln c}^{b \ln c} = \frac{c^b - c^a}{\ln c}.$$

Natürlich hätte man auch einfach bemerken können, dass $\frac{c^x}{\ln c}$ eine Stammfunktion von c^x ist. $\triangleleft$

Beispiel. Mit der Methode der quadratischen Ergänzung findet man

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1.$$

Mit der Substitution

$$y = x - 2, \qquad \frac{dy}{dx} = 1$$

erhalten wir

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = \int_{a-2}^{b-2} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \operatorname{arcosh} y \Big|_{a-2}^{b-2},$$

falls $a \geq 3$ und $b \geq 3$. Ist hingegen $a \leq 1$ und $b \leq 1$, so ist die Substitution $y = 2 - x$ zu verwenden. $\triangleleft$

Beispiel. Ist $f(y) = \frac{1}{y}$, so wird die Substitutionsregel zu

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{dy}{y} = \big[\ln |y|\big]_{g(a)}^{g(b)},$$

vorausgesetzt, $g(x) \neq 0$ für $x \in [a, b]$. So ergibt sich beispielsweise

$$\int_a^b \tan x \, dx = -\int_a^b \frac{\cos' x \, dx}{\cos x} = -\int_{\cos a}^{\cos b} \frac{dy}{y} = \ln |\cos a| - \ln |\cos b|,$$

vorausgesetzt, die Tangensfunktion ist auf $[a, b]$ stetig. $\triangleleft$

Satz 92 (partielle Integration). *Sind f und g auf einem Intervall I stetig differenzierbar, so gilt für $a,\, b \in I$*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz gilt

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b,$$

und nach der Produktregel ist der Integrand gleich $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. □

Beispiel. Es sei $s \neq -1$ und $a,\, b > 0$. Dann ist

$$\int_a^b x^s \ln x\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}\ln x\big|_a^b - \frac{1}{s+1}\int_a^b x^s dx = \frac{x^{s+1}}{(s+1)^2}\big((s+1)\ln x - 1\big)\bigg|_a^b.$$

Ist $s > 0$, so gilt das durch Grenzübergang auch für $a = 0$. Im verbleibenden Fall $s = -1$ benötigt man keine partielle Integration, denn $\frac{1}{2}(\ln x)^2$ ist dann eine Stammfunktion. ◁

Beispiel. Man kann die partielle Integration natürlich auch zur Bestimmung von Stammfunktionen benutzen, z. B.

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x,$$

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - \int_a^b 2xe^x dx = \big(x^2 - 2(x-1)\big)e^x$$

usw. Mit der selben Methode, den Exponenten durch partielle Integration zu verringern, berechnet man auch $\int x^n \sin x\,dx$ und $\int x^n \cos x\,dx$. ◁

Beispiel. Manchmal hilft es weiter, den Faktor 1 als Ableitung aufzufassen:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin x + C.\end{aligned}$$

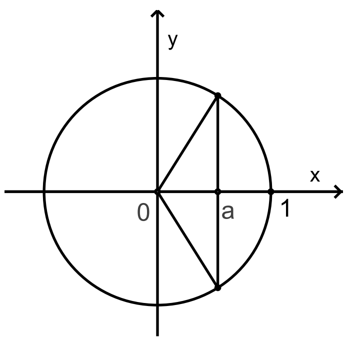
Wir scheinen uns im Kreis gedreht zu haben, weil rechts wieder das gesuchte unbestimmte Integral auftaucht. Bringen wir es aber auf die linke Seite und teilen durch 2, so erhalten wir die Antwort. Für $a,\, b \in \,]-1, 1[$ gilt also

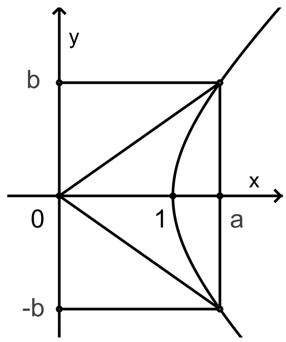
$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\big[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\big]_a^b,$$

und durch Grenzübergang gilt dies sogar für $a,\ b \in [-1,1]$. Eine andere Methode besteht in der Substitution $x = \sin\varphi$. Setzen wir $b = 1$, so erhalten wir

$$a\sqrt{1-a^2} + 2\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin 1 - \arcsin a = \arccos a.$$

Man kann $\arccos a$ also als Fläche des Kreissektors interpretieren, dessen Ecken die Punkte des Einheitskreises mit Abszisse a sind.





Analog findet man

$$\int_a^b \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\big[x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{arsinh} x\big]_a^b$$

sowie für $a,\ b \in [1,\infty[$

$$\int_a^b \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\big[x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcosh} x\big]_a^b.$$

Die Spezialfälle

$$2\int_0^b \sqrt{y^2+1}\,dy - b\sqrt{b^2+1} = \operatorname{arsinh} b,$$
$$a\sqrt{a^2-1} - 2\int_1^a \sqrt{x^2-1}\,dx = \operatorname{arcosh} a$$

zeigen, dass man $\operatorname{arsinh} b$ und $\operatorname{arcosh} a$ als Fläche des Hyperbelsektors interpretieren kann, der von dem Bogen der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ begrenzt wird, dessen Endpunkte die Abszisse a und die Ordinate $\pm b$ haben. Daher rührt die Bezeichnung *Areafunktionen*[17] für die Umkehrungen der *Hyperbelfunktionen*[18] aus Aufgabe 57. ◁

[17] *area sinus hyperbolici, area cosinus hyperbolici etc.*
[18] *sinus hyperbolicus, cosinus hyperbolicus etc.*

9.4.1 Integration rationaler Funktionen

Eine Funktion heißt *rational*, wenn sie durch einen Term gegeben ist, in dem nur die vier Grundrechenoperationen vorkommen. Jede solche Funktion kann als Quotient zweier ganzrationaler Funktionen geschrieben werden. Um zu zeigen, dass diese Funktionen elementare Stammfunktionen besitzen, benötigt man den

Satz 93 (Hauptsatz der Algebra)**.** *Jede ganzrationale Funktion einer Variablen mit komplexen Koeffizienten hat eine komplexe Nullstelle.*

Obwohl die Formulierung algebraisch erscheint, geht doch die analytische Eigenschaft der Vollständigkeit des Körpers der komplexen Zahlen ein. Der Beweis ist darum Gegenstand der Analysis. Wir werden ihn hier nicht führen, da im Rahmen der (komplexen) Funktionentheorie ein kurzer und eleganter Beweis gegeben werden kann.

Wir merken an, dass eine Zahl c genau dann Nullstelle der ganzrationalen Funktion f ist, wenn $f(z)$ im Ring der Polynome durch $z-c$ teilbar ist. Ist $f(z)$ mehrmals durch $z-c$ teilbar, so nennt man c eine mehrfache Nullstelle.

Satz 94. *Jede rationale Funktion R von einer Variablen z mit komplexen Koeffizienten kann auf eindeutige Weise als Summe einer ganzrationalen Funktion und von Funktionen der Form $\frac{C}{(z-c)^k}$ (genannt die* Partialbrüche *von R) mit $c, C \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geschrieben werden.*

Beweis. Es sei $R = \frac{f}{g}$ mit ganzrationalen Funktionen f und g. Nach dem Hauptsatz der Algebra hat g eine Nullstelle c. Es gibt eine natürliche Zahl $k \geq 1$ und eine ganzrationale Funktion h, so dass $g(z) = (z-c)^k h(z)$ und $h(c) \neq 0$. Für jedes $C \in \mathbb{C}$ gilt

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{C}{(z-c)^k} + \frac{f(z) - Ch(z)}{(z-c)^k h(z)}.$$

Wegen $h(c) \neq 0$ können wir C so wählen, dass $f(c) - Ch(c) = 0$, und dann ist

$$f(z) - Ch(z) = (z-c) f_1(z)$$

mit einer ganzrationalen Funktion f_1. Der Grad von $g_1(z) = (z-c)^{k-1} h(z)$ ist kleiner als der von g, und

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{C}{(z-c)^k} + \frac{f_1(z)}{g_1(z)}.$$

Nun folgt die Existenz der behaupteten Darstellung durch Induktion nach dem Grad von g.

Die Eindeutigkeit beweisen wir ebenfalls durch vollständige Induktion. Der Koeffizient C beim höchsten vorkommenden Exponenten k ist eindeutig bestimmt als

$$C = \lim_{z \to c} (z-c)^k \frac{f(z)}{g(z)}$$

und die Zahl k als die kleinste natürliche Zahl, für die dieser Grenzwert existiert. Laut Induktionsvoraussetzung ist die Partialbruchzerlegung von $\frac{f_1(z)}{g_1(z)}$ eindeutig bestimmt. $\square$

Beispiel. Um die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 6x + 5}{x^3 - 3x + 2}$$

zu finden, bestimmen wir zunächst die Nullstellen des Nenners:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

Nun wenden die Methode aus dem Beweis auf $c = 1$ und $k = 2$ an:

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 6x + 5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x^3 + 4x^2 + 4x - 3}{(x-1)(x+2)}.$$

Auf den Rest können wir sie noch einmal anwenden:

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 4x - 3}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{x^2 + 5x + 7}{x+2}.$$

Eine nochmalige Anwendung (oder einfach Polynomdivision) ergibt

$$\frac{x^2 + 5x + 7}{x+2} = \frac{1}{x+2} + x + 3.$$

Nun braucht man nur noch einzusetzen.

Anstatt die Methode aus dem Beweis zu benutzen, setzt man oft eine Partialbruchzerlegung mit unbestimmten Koeffizienten an und bestimmt letztere durch Beseitigung der Nenner und Koeffizientenvergleich. $\triangleleft$

Hat man die Partialbruchzerlegung bestimmt, so kann man jeden Partialbruch einzeln integrieren. Der einzige schwierige Fall ist $c \notin \mathbb{R}$, $k = 1$. Uns interessieren hier nur rationale Funktionen mit reellen Koeffizienten. Aus $\overline{R(z)} = R(\bar{z})$ folgt dann wegen der Eindeutigkeit, dass mit jedem Partialbruch $\frac{C}{z-c}$ auch $\frac{\bar{C}}{z-\bar{c}}$ auftritt. Mit der Bezeichnung $c = a + ib$, $C = A + iB$ erhalten wir

$$\frac{C}{x-c} + \frac{\bar{C}}{x-\bar{c}} = 2\frac{A(x-a) - Bb}{(x-a)^2 + b^2},$$

und es folgt

$$\int \left(\frac{C}{x-c} + \frac{\bar{C}}{x-\bar{c}} \right) dx = A \ln\bigl((x-a)^2 + b^2\bigr) - 2B \arctan \frac{x-a}{b}.$$

9.4.2 Zurückführung auf Integrale rationaler Funktionen

Integrale von Verkettungen rationaler Funktionen R mit einigen weiteren Funktionen lassen sich durch geschickte Substitutionen auf Integrale rationaler Funktionen zurückführen. Dabei kann R eine Funktion von mehrerer Variablen sein, aber die Verkettung darf nur von einer Variablen abhängen. Wir schreiben nur die Version für unbestimmte Integrale auf, wobei dann die Substitution durch eine umkehrbare Funktion gegeben sein muss, da ja am Ende die Stammfunktion durch die ursprüngliche Variabel ausgedrückt werden muss.

(i) Bei Integralen der Form

$$\int R\big(x, \sqrt[n]{ax+b}\,\big)\, dx$$

führt die Substitution

$$t = \sqrt[n]{ax+b}, \qquad x = \frac{t^n - b}{a}, \qquad dx = \frac{n}{a}\, t^{n-1} dt$$

auf das Integral einer rationalen Funktion

$$\frac{n}{a} \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right) t^{n-1} dt.$$

(ii) Bei Integralen der Form

$$\int R(e^{ax})\, dx$$

führt die Substitution

$$t = e^{ax}, \qquad x = \frac{1}{a} \ln t, \qquad dx = \frac{dt}{at}$$

auf das Integral einer rationalen Funktion

$$\frac{1}{a} \int \frac{R(t)}{t}\, dt.$$

(iii) Bei Integralen der Form

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx$$

gibt es zwei einfache Spezialfälle. Gilt $R(-u, v) = -R(u, v)$, dann gibt es eine rationale Funktion R_1, so dass

$$R(u, v) = R_1(u^2, v)u,$$

Gilt hingegen $R(u,-v) = -R(u,v)$, dann gibt es eine rationale Funktion R_2, so dass
$$R(u,v) = R_2(u,v^2)v.$$
Man substituiert
$$t = \sin x, \quad dt = \cos x\, dx \qquad \text{bzw} \qquad t = \cos x, \quad dt = \sin x\, dx$$
und erhält
$$\int R_1(1-t^2,t)\, dt \qquad \text{bzw.} \qquad \int R_2(t, 1-t^2)\, dt.$$
Im allgemeinen Fall hilft die Substitution
$$t = \tan\frac{x}{2}, \qquad dt = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}.$$
Wegen
$$\begin{aligned} 1+t^2 &= \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}, \\ 1-t^2 &= \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos x}{\cos^2\frac{x}{2}}, \\ 2t &= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}} \end{aligned}$$
ist nämlich
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$
und wir erhalten das Integral einer rationalen Funktion
$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$
Natürlich muss die Substitutionsfunktion auf ein Intervall eingeschränkt werden, auf dem sie monoton und somit umkehrbar ist.

(iv) Bei Integralen der Form
$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+2bx+c}\big)\, dx$$

bildet man im Radikanden zunächst die quadratische Ergänzung:

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{(ax+b)^2 + ac - b^2}{a} = A(\pm t^2 \pm 1),$$

wobei

$$A = \left| \frac{ac - b^2}{a} \right|, \qquad t = \frac{ax+b}{\sqrt{|ac - b^2|}}.$$

und durch die offensichtliche Substitution erhalten wir ein Integral in einer der Formen

$$\int R_3\big(t, \sqrt{t^2+1}\,\big)\,dt, \quad \int R_3\big(t, \sqrt{t^2-1}\,\big)\,dt, \quad \int R_3\big(t, \sqrt{1-t^2}\,\big)\,dt.$$

Die weitere Substitution

$$t = \sinh u, \qquad t = \cosh u \qquad \text{bzw.} \qquad t = \cos u$$

führt dann auf ein schon unter (ii) bzw. (iii) behandeltes Integral.

9.5 Uneigentliche Integrale

Das Riemannsche Integral ist nur für beschränkte Funktionen auf beschränkten Intervallen definiert, da sonst die Ober- oder Untersummen nicht existieren.

Definition 60. *Es sei* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *und* $f : \,]a,b[\, \to \mathbb{C}$*, wobei* $f\big|_{[\alpha,\beta]}$ *für jedes beschränkte abgeschlossene Teilintervall* $[\alpha,\beta]$ *integrierbar ist. Man nennt*

$$\lim_{\alpha\to a} \lim_{\beta\to b} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

das uneigentliche Integral *von* f *über* $]a,b[$*, falls die (einseitigen) Grenzwerte existieren, und bezeichnet es mit* $\int_a^b f(x)\,dx$*. (In diesem Fall sagt man, dass das uneigentliche Integral konvergent ist.)*

Ist f zu einer integrierbaren Funktion auf $[a,b]$ fortsetzbar (wofür $[a,b]$ und f beschränkt sein müssen), so ist das (eigentliche) Integral in Folge von Satz 86 gleich dem uneigentlichen Integral, weshalb man für beide die selbe Schreibweise verwenden darf. Wegen Satz 17 und 84 ist für jedes $c \in \,]a,b[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a} \int_\alpha^c f(x)\,dx + \lim_{\beta\to b} \int_c^\beta f(x)\,dx.$$

Man nennt die Integrationsgrenze a kritisch, wenn sich f nicht zu einer integrierbaren Funktion auf $[a, c]$ fortsetzt, und analog für b.
Beispiel. Für $s \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^s} = \lim_{\beta\to\infty} \begin{cases} \frac{1-\beta^{1-s}}{s-1} & \text{für } s \neq -1, \\ \ln\beta & \text{für } s = -1. \end{cases}$$

Das uneigentliche Integral konvergiert genau dann, wenn $s > 1$, und zwar gegen $\frac{1}{s-1}$. Weiter gilt

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \lim_{\alpha\to 0} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x^s} = \lim_{\alpha\to 0} \begin{cases} \frac{1-\alpha^{1-s}}{1-s} & \text{für } s \neq -1, \\ -\ln\alpha & \text{für } s = -1. \end{cases}$$

Dieses uneigentliche Integral konvergiert genau dann, wenn $s < 1$, und zwar gegen $\frac{1}{1-s}$. $\triangleleft$

Definition 61. *Das uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *heißt* absolut konvergent, *wenn das Integral* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *konvergent ist.*

Satz 95. (i) *Ein absolut konvergentes Integral ist konvergent.*

(ii) *Sind* $f,\ g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *und gilt* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *für alle* $x \in]a, b[$, *so folgt aus der Konvergenz von* $\int_a^b g(x)\,dx$ *die von* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Beweis. **(i)** Es sei z. B. nur b kritisch. Wir betrachten

$$F(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx, \qquad H(\beta) = \int_a^\beta |f(x)|\,dx.$$

Wenn $\lim\limits_{\beta\to b} H(\beta)$ existiert, so gibt es nach dem Cauchykriterium (Satz 64) für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x_0 < b$, so dass für alle $\beta,\ \gamma \in]x_0, b[$ gilt $|H(\gamma) - H(\beta)| < \varepsilon$. Nach den Sätzen 84 und 86 ist

$$|F(\gamma) - F(\beta)| \leq |H(\gamma) - H(\beta)|,$$

also existiert dann auch $\lim\limits_{\beta\to b} F(\beta)$.
(ii) Es sei z. B. nur b kritisch für f oder g. Mit der Bezeichnung $G(\beta) = \int_a^\beta g(x)\,dx$ gilt nach Satz 87

$$0 \leq F(\beta) \leq G(\beta),$$

und aus der Beschränktheit von G folgt die von F. Ebenfalls nach Satz 87 ist F monoton wachsend, und die Konvergenz folgt mit dem Monotoniekriterium (Satz 63). $\square$

Beispiel. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_1^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^\beta - \int_1^\beta \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Das verbleibende Integral ist für $\beta \to \infty$ konvergent durch Vergleich mit $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$. Also ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

konvergent. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{1}{k\pi} \int (k-1)\pi^{k\pi} \left|\sin x\right| dx = \frac{2}{k\pi},$$

also

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

und folglich ist das uneigentliche Integral nicht absolut konvergent. $\triangleleft$

Satz 96 (Integralkriterium für Reihen)**.** *Es sei $f : [1,\infty[\, \to \mathbb{R}$ monoton fallend und nichtnegativ. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert genau dann, wenn das Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.*

Beweis. Nach Satz 83 ist f auf jedem beschränkten Teilintervall integrierbar. Für $x \in [k, k+1]$ gilt $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$, also nach Satz 87

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=2}^{n} f(k),$$

und die Behauptung folgt aus den Monotoniekriterien (Sätze 28 und 63). $\square$

Natürlich gilt der Satz auch, wenn nur die Einschränkung von f auf ein Teilintervall $[x_0, \infty[$ nichtnegativ und monoton fallend ist.

Beispiel. Mit der Substitution $y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$ erhalten wir

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^s} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{dy}{y^s},$$

was nach dem obigen Beispiel genau für $s > 1$ konvergent ist. Wir können den Satz mit $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^s}$ anwenden, denn

$$f'(x) = -\frac{s + \ln x}{x^2(\ln x)^{s+1}}$$

ist negativ für genügend große x. Also ist auch

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$$

genau dann konvergent, wenn $s > 1$. $\triangleleft$