

Übungen zur Analysis II

Blatt 0 – Tutorien der Woche 17.-21.10.22

- A. Berechnen Sie die Riemannschen Ober- und Untersummen der Exponentialfunktion auf dem Intervall $[0, 1]$ bezüglich der äquidistanten Teilungen. Bestimmen Sie das Integral durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$.
- B. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

- C. Es sei $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Prüfen Sie nach, dass für die äquidistanten Teilungen T_n und die Mengen Z_n der Stützstellen, die jeweils in der Mitte der zugehörigen Teilintervalle liegen, für die Zwischensummen der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(g, T_n, Z_n)$$

existiert, obwohl die Funktion g nicht integrierbar ist.

Begründen Sie andererseits, warum für eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, T_n)$$

die Integrierbarkeit folgt.