Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

WS 2022/23

Übungen zu Analysis II

Blatt 1 - Abgabe bis 21.10.2022, 12:00 Uhr

1. Berechnen Sie für beliebige reelle Zahlen $b > 1$ und s die Riemannschen Ober- und Untersummen der Funktion $f(x) = x^s$ auf dem Intervall $[1, b]$ bezüglich der Teilungen $[1, q, q^2, \ldots, q^n]$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $q = \sqrt[n]{b}$. Bestimmen sie das Integral durch Grenzübergang $n \to \infty$.
Hinweis: Betrachten Sie den Fall $s = -1$ getrennt.

2. Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ für teilerfremde } p,\, q \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f integrierbar ist und dass

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele x mit $f(x) > \varepsilon$ gibt.

3. Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & \text{wenn } x \in]0, 1], \\ 0, & \text{wenn } x = 0, \end{cases}$$

definierte Funktion f auf dem Intervall $[0, 1]$ integrierbar ist.

4. Es seien a, b, c reelle Zahlen und f eine integrierbare Funktion auf dem Intervall mit den Grenzen $\min\{a, b, c\}$ und $\max\{a, b, c\}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx,$$

wenn das Integral wie in Definition 7.3 auf eine beliebige Anordnung der Integrationsgrenzen verallgemeinert wird. Zeigen Sie auch, dass diese Definition die Einzige ist, die die Gültigkeit der obigen Formel garantiert.

5.* Beweisen Sei das Cauchy-Kriterium der Integrierbarkeit:

Eine beschränkte Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ist genau dann integrierbar, wenn es für jede positive Zahl ε eine positive Zahl δ gibt, so dass für alle Teilungen T und T' von $[a, b]$ mit einer Feinheit kleiner als δ und für alle Mengen Z und Z' von Stützstellen für T bzw. T' gilt

$$|S(f, T, Z) - S(f, T', Z')| < \varepsilon.$$