Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

WS 2022/23

Übungen zu Analysis II

Blatt 10 - Abgabe bis 23.12.2022, 12:00 Uhr

46. Prüfen Sie, dass durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ye^{-x}-1)^2 + \ln y & \text{für } y \geq e^x, \\ ye^{-x} - 1 + x & \text{für } y \leq e^x \end{cases}$$

eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung 2 und zeigen Sie, dass f zweimal stetig differenzierbar ist.

47. Es sei $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\}$ die offene Einheitskugel. Zeigen Sie, dass durch

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|_2^2}}, \qquad g(y) = \frac{y}{\sqrt{1-\|y\|_2^2}}$$

zueinander inverse Diffeomorphismen

$$f : \mathbb{R}^n \to B, \qquad g : B \to \mathbb{R}^n$$

definiert werden.

48. Wir betrachten für eine Zahl $a > 0$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit der gesuchten zweimal differenzierbaren Funktion u auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige zweimal differenzierbare Funktionen f und g auf $\mathbb{R}$ die Funktion

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$$

eine Lösung ist.

(b) Zeigen Sie, dass es für eine gegebene zweimal differenzierbare Funktion u_0 auf $\mathbb{R}$ und eine gegebene einmal differenzierbare Funktion u_1 auf $\mathbb{R}$ genau eine Lösung u mit den Eigenschaften

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{und} \quad \delta_t u(x,0) = u_1(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gibt.

49. Berechnen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = x^y$$

an der Stelle $(1,1)$.

50.* Es seien T, U, V und W reelle bzw. komplexe Vektorräume, $b : U \times V \to W$ eine bilineare Abbildung und D eine offene Teilmenge von T. Die Abbildungen $f : D \to U$ und $g : D \to V$ seien n-mal differenzierbar. Zeigen Sie, dass für alle $a \in D$ und $t_1, \ldots, t_n \in T$ gilt

$$d^n\big(b \circ (f,g)\big)(a)(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{I \subseteq N} b\big(d^{|I|}f(a)(t_I), d^{|N\setminus I|}g(a)(t_{N\setminus I})\big),$$

wobei $N = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$ und für $I = \{i_1,\ldots,i_k\}$ mit $|I| = k$

$$t_I = (t_{i_1},\ldots,t_{i_k}).$$