Universität Bielefeld WS 2022/23
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu Analysis II

Blatt 12 - Abgabe bis 20.1.2023, 12:00 Uhr

56. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch
$$f(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$$
definiert. Zeigen Sie, dass ein Punkt (a, b, c) genau dann eine Umgebung besitzt, in der sich die Einschränkung von f invertieren lässt, wenn die Zahlen a, b und c paarweise verschieden sind.

57. Nach welchen Variablen lässt sich die Gleichung
$$\sin(x + y) + ye^z + (z - 1)e^x = 0$$
in der Umgebung des Punktes $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ auflösen? Bestimmen Sie in diesem Punkt jeweils die partiellen Ableitungen der entstehenden Funktion von zwei Variablen.

58. Man zeige, dass sich das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} xu - y^2 + e^v &= 0 \\ e^x + y(v + \ln u) &= 1 \end{aligned}$$
in einer Umgebung des Punktes $(x, y, u, v) = (0, 1, 1, 0)$ durch eine Funktion $(u, v) = f(x, y)$ auflösen lässt, und bestimme ihre Jacobimatrix an der Stelle $(0, 1)$.

59. Es seien $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Abbildungen und $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt mit $b = f(a)$. Angenommen, $\delta_2 G(a, b) \neq 0$, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $G(x, f(x)) = 0$.

    Drücken Sie $f''(a)$ durch die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von G an der Stelle (a, b) aus.

60.* Es seien U, V und W endlichdimensionale reelle oder komplexe Vektorräume und $f : U \to V$ sowie $g : V \to W$ Abbildungen, wobei f zweimal an der Stelle a und g zweimal an der Stelle $f(a)$ differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass dann für alle u_1, $u_2 \in U$ gilt
$$\begin{aligned} d^2(g \circ f)(a)(u_1, u_2) = d^2 g(f(a))\big(df(a)(u_1), df(a)(u_2)\big) \\ + dg(f(a))\big(d^2 f(a)(u_1, u_2)\big) \end{aligned}$$
und dass im Fall $U = W$, wenn f die Umkehrabbildung von g ist, gilt
$$d^2 f(a)(u_1, u_2) = dg(f(a))^{-1}\big(d^2 g(f(a))(df(a)(u_1), df(a)(u_2))\big).$$