Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann WS 2022/23

Übungen zu Analysis II

Blatt 5 - Abgabe bis 18.11.2022, 12:00 Uhr

21. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für die Normen $\|\,.\,\|_1$ und $\|\,.\,\|_\infty$ auf K^n, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

22. Es seien p, q und r positive reelle Zahlen mit der Eigenschaft $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Beweisen Sie, dass für alle x, y und $z \in K^n$ gilt
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i z_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q \|z\|_r,$$
wobei $n \in \mathbb{N}$ und $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

23. Es sei X die Menge aller Folgen $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in einer Menge A, und für x, $y \in X$ sei
$$d(x, y) = \exp(-\inf\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \neq y_k\}),$$
wobei wir $\exp(-\infty) = 0$ setzen. Zeigen Sie, dass für x, y, $z \in X$ gilt
$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$
und dass d eine Metrik auf X ist.

24. Es sei X ein metrischer Raum. Ein Punkt einer Teilmenge B heißt innerer Punkt, wenn er eine Umgebung besitzt, die in B enthalten ist. Der Abschluss $\bar{B}$ von B ist die Menge der Häufungspunkte von Folgen in B. Beweisen Sie folgende Behauptungen.
    (a) Die Menge $\mathring{B}$ der inneren Punkte von B ist die größte offene Menge, die in B enthalten ist.
    (b) Der Abschluss $\bar{B}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, in der B enthalten ist.
    (c) Für offene Mengen U und abgeschlossene Mengen A in X gilt
$$U \subseteq \mathring{\bar{U}} \qquad A \supset \bar{\mathring{A}}$$
$$\bar{U} = \bar{\mathring{\bar{U}}} \qquad \mathring{A} = \mathring{\bar{\mathring{A}}}$$

25.* Es seien $f : [p, q] \to [r, s]$ und $g : [r, s] \to [p, q]$ zueinander inverse monoton wachsende bijektive Abbildungen. Zeigen Sie ohne Verwendung der Maßtheorie, dass
$$\int_p^q f(x)\,dx + \int_r^s g(y)\,dy = qs - pr.$$