Universität Bielefeld WS 2022/23
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu Analysis II

Blatt 7 - Abgabe bis 2.12.2022, 12:00 Uhr

31. Eine Folge gleichmäßig stetiger Funktionen f_k konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion f. Zeigen Sie, dass auch f gleichmäßig stetig ist.

32. Zeigen Sie, dass jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine abzählbare Vereinigung disjunkter offener Intervalle ist.

    Hinweis: Zusammenhangskomponenten.

    * Geben Sie ein Beispiel an, bei dem zwischen zwei Komponenten immer unendlich viele andere liegen.

33. Es sei X ein kompakter metrischer Raum. Beweisen Sie folgende Aussagen.

    (a) Ist $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ eine Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen, so ist der Durchschnitt all dieser Teilmengen nicht leer und kompakt.

    (b) Ist eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt (das heißt, in einer geeigneten Umgebung eines beliebigen Punktes beschränkt), so ist sie beschränkt.

34. Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt abgeschlossen, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist.

    Zeigen Sie, dass ein metrischer Raum X genau dann kompakt ist, wenn für jeden metrischen Raum Y die durch $p(x, y) = y$ definierte Projektion $X \times Y \to Y$ abgeschlossen ist.

    Hinweis für die Rückrichtung: Betrachten Sie für eine gegebene Folge x_k den Raum $Y = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ sowie den Abschluss der Menge $\left\{ \left(x_k, \frac{1}{k}\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ in $X \times Y$.

35.* Zeigen Sie, dass das Komplement einer abzählbaren Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ wegzusammenhängend ist.