Universität Bielefeld WS 2022/23
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu Analysis II

Blatt 9 - Abgabe bis 16.12.2022, 12:00 Uhr

41. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitungen der Funktion
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
an der Stelle $(0,0)$ bezüglich jedes Vektors (u,v) existieren, dass aber f an dieser Stelle nicht differenzierbar ist.

42. Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume mit Normen, $D \subseteq V$ konvex und offen sowie $f : D \to W$ differenzierbar mit
$$\|df(x)\| \leq c \quad \text{für alle } x \in D.$$
Zeigen Sie, dass c eine Lipschitz-Konstante für f ist. Zeigen Sie ferner, dass die Bedingung der Konvexität nicht weggelassen werden kann.

43. Gegeben seien seien $a > b > c > 0$. Wir definieren Funktionen f, g und h auf der Menge D aller (x,y,z) mit $a > x > b > y > c > z$ durch
$$f(x,y,z) = \sqrt{\frac{(a-x)(a-y)(a-z)}{(a-b)(a-c)}},$$
$$g(x,y,z) = \sqrt{\frac{(b-x)(b-y)(b-z)}{(b-a)(b-c)}},$$
$$h(x,y,z) = \sqrt{\frac{(c-x)(c-y)(c-z)}{(c-a)(c-b)}}.$$
Berechnen Sie die Jacobi-Matrix J der Abbildung $(f,g,h) : D \to \mathbb{R}^3$ an einer Stelle (x,y,z) sowie die Matrix $J^\top \cdot J$.

44. Gegeben sei $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Es sei $f_\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um die Gerade durch 0 und a mit Drehwinkel $\varphi\|a\|$ in positiver Richtung. Setzen wir also
$$X = \left.\frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0},$$
so hat für $x \notin \mathbb{R}a$ die Basis $(a, x, X(x))$ positive Orientierung. Berechnen Sie die Abbildung f_φ, das Vektorfeld X sowie $\operatorname{div} X$ und $\operatorname{rot} X$.

Hinweis: Sie dürfen das Vektorprodukt benutzen.

45.* Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Für jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ gebe es eine lineare Abbildung $l_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass die Richtungsableitung bezüglich eines beliebigen Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ im Punkt a existiert und durch $\partial_v f(a) = l_a(v)$ gegeben ist. Folgt daraus, dass f in jedem Punkt differenzierbar ist?