Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

SS 2007

Übungen zu Analysis C

Blatt 1 - Abgabe bis 10.4.2006

1. Zeigen Sie, dass für beliebige konvexe Teilmengen A, B eines reellen Vektorraums gilt

$$\operatorname{conv}(A \cup B) = \{\lambda a + (1-\lambda)b \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

2. Die affine Hülle der Menge $\{a_0, \ldots, a_n\}$ in einem reellen Vektorraum sei die Menge aller Punkten der Form

$$x = \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n a_n,$$

wobei $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) Die Punkte $a_0, \ldots, a_n$ sind affin unabhängig.

   (b) Die Vektoren $v_1 = a_1 - a_0, \ldots, v_n = a_n - a_0$ sind linear unabhängig.

   (c) Keiner der Punkte $a_0, \ldots, a_n$ liegt in der affinen Hülle der übrigen Punkte.

3. Ein metrischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es für beliebige Punkte a, $b \in X$ eine stetige Abbildung $f : [0,1] \to X$ mit $f(0) = a$ und $f(1) = b$ gibt.

   Beweisen Sie, dass jeder wegzusammenhängende metrische Raum Hausdorff-zusammenhängend ist.

   (Hinweis: Betrachten Sie die Urbilder der Teilmengen von X unter f.)

4. Finden Sie fixpunktfreie stetige Abbildungen folgender Mengen in sich selbst:

$$[0,\infty), \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

5.* Beweisen Sie, dass jede Hausdorff-zusammenhängende offene Menge in $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend ist.