Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

SS 2007

Übungen zu Analysis C

Blatt 10 - Abgabe bis 19.6.2007

46. Es seien μ, μ_1, ..., μ_n Maße auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass durch die folgenden Festlegungen jeweils ein Maß ν auf $\mathcal{A}$ definiert wird.

    (a) $\nu(A) = \mu(A \cap B)$ für ein festes $B \in \mathcal{A}$.

    (b) $\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$.

47. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf einem offenen beschränkten Intervall I und λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Beweisen Sie:

    (a) Ist $\varepsilon > 0$ und $|f'(x)| \leq \varepsilon$ auf ein Intervall J, so ist der Durchmesser von $f(J)$ höchstens $\varepsilon\lambda(J)$.

    (b) Ist $\varepsilon > 0$ und $A_\varepsilon = \{x \in I : |f'(x)| < \varepsilon\}$, so ist $\lambda(f(A_\varepsilon)) \leq \varepsilon\lambda(I)$.

    (c) Ist $A = \{x \in I : f'(x) = 0\}$, so ist $f(A)$ eine Lebesguesche Nullmenge.

48. Es sei β die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf die Algebra $\mathcal{B}$ der Borelmengen in $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Bildmaß von β unter den folgenden Abbildungen:

    $$f(x) = 2x + |x-1| - |x+1|, \qquad g(x) = \sin x, \qquad h(x) = 2x - [x],$$

    wobei $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.
    (Hinweis: Ein Maß auf $\mathcal{B}$ ist durch seine Werte auf Intervallen bestimmt.)

49. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und N die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Weiter sei $\mathcal{B}$ wie oben und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie:

    (a) Ist N abzählbar, so ist f $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$-messbar.

    (b) Ist N eine Lebesguesche Nullmenge, so ist f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar.

    (Hinweis: Betrachten Sie zunächst $g = f|_{N^c}$.)

50.* Es sei r_n eine Abzählung von $\mathbb{Q}$, $I_n = (r_n, r_n + n^{-2})$ und

    $$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lambda(A \cap I_n).$$

    Beweisen Sie, dass μ ein σ-endliches Maß auf der Algebra der Borelmengen in $\mathbb{R}$ ist, dass aber $\mu(I) = \infty$ für jedes Intervall I positiver Länge ist.