Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

SS 2007

Übungen zu Analysis C

Blatt 11 - Abgabe bis 26.6.2007

51. Zeigen Sie, dass die durch

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[n]{q}}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p,\, q \in \mathbb{Z} \text{ teilerfremd, } q > 0, \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierte Funktion f_n Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie ihr Riemannsches Integral über ein beliebiges Intervall $[a, b]$. Zeigen Sie, dass die Folge der Funktionen f_n monoton wachsend und punktweise konvergent ist, aber die Grenzwertfunktion nicht Riemann-integrierbar ist.

52. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie, dass für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f(x+n)$ ist absolut konvergent, und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n) = 0$.
(Hinweis: Lemma von Fatou auf einem geeigneten Intervall.)

53. Es sei μ ein endliches Maß auf X und $f : X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann μ-integrierbar ist, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(\{|f| > n\}\big) < \infty.$$

54. Es sei μ ein Maß auf X, $\mathfrak{L}^1(X, \mu)$ der Raum der integrierbaren Funktionen und $L^1(X, \mu)$ sein Faktorraum nach dem Unterraum der Funktionen, die fast überall gleich Null sind. Zeigen Sie, dass

$$\|f\|_1 = \int |f|\, \mu$$

eine Norm auf $L^1(X, \mu)$ ist.

55.* Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ sei integrierbar bezüglich des Maßes μ auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt

$$\left| \int_A f\mu \right| < \varepsilon.$$

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst beschränkte Funktionen.)

(b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$, so dass für alle $B \in \mathcal{A}$ mit $B \supset A$ gilt

$$\left| \int_{B^c} f \mu \right| < \varepsilon.$$