Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2007

Übungen zu Analysis C

Blatt 12 - Abgabe bis 3.7.2007

56. Bestimmen Sie mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips das Volumen des Restkörpers, der übrig bleibt, wenn man durch eine Kugel ein zylindrisches Loch bohrt, wobei die Zylinderachse durch den Kugelmittelpunkt geht. Drücken Sie das Ergebnis durch die Höhe der zylindrischen Schnittfläche aus.

57. Es seien μ, ν und π σ-endliche Maße auf σ-Algebren $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ über Mengen X, Y bzw. Z. Zeigen Sie, dass

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}), \qquad (\mu \otimes \nu) \otimes \pi = \mu \otimes (\nu \otimes \pi).$$

(Hinweis: Charakterisieren Sie diese σ-Algebra und dieses Maß in einem Schritt.)

58. Es sei μ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ über X und β die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf die σ-Algebra $\mathcal{B}$ der Borel-Mengen in $[0, \infty)$. Beweisen Sie:

    (a) Eine Funktion $f : X \to [0, \infty)$ ist genau dann messbar, wenn die Ordinatenmenge

    $$M = \{(x, y) \in X \times [0, \infty) \mid y < f(x)\}$$

    zu $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gehört. (Hinweis: Betrachten Sie $g(x, y) = f(x) - y$.)

    (b) Ist μ σ-endlich und f messbar, so gilt

    $$\int f\mu = \mu \otimes \beta\,(M) = \int_0^\infty \mu(\{x \in X \mid f(x) > y\})\, dy.$$

59. Es sei $f_\alpha(x, y) = xy/(x^2 + y^2 + 1)^\alpha$. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die iterierten Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx \right) dy, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \right) dx$$

existieren. Für welche α ist f_α Lebesgue-integrierbar über $\mathbb{R}^2$?

60.* Es seien f ung g messbare Funktionen auf einer Menge X, so dass $|f|^2$ und $|g|^2$ bezüglich eines Maßes μ auf X integrierbar sind. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini durch Betrachtung der Funktion $f(x)g(x)f(y)g(y)$ die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\left(\int |fg|\mu\right)^2 \leq \int |f|^2\mu \int |g|^2\mu.$$

(Hinweis: f und g verschwinden außerhalb einer messbaren Menge, auf der μ σ-endlich ist.)