Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2007

Übungen zu Analysis C

Blatt 13 - freiwillige Abgabe bis 10.7.2007

61. Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $\frac{\sin x}{x^\alpha}$ über das Intervall $[1, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar und für welche α sie Lebesgue-integrierbar ist.

62. Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $s > 0$ das Integral

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx$$

mit Hilfe partieller Integration und bestätigen Sie so die Formel

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

63. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

und den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$. Berechnen Sie f explizit. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

(Hinweis: Die Reihe der Integrale über die Intervalle $(k\pi, (k+1)\pi)$ ist alternierend. Schätzen Sie das Integral über $(k\pi, \infty)$ für große k gleichmäßig in t ab.)

64. Es sei $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ und $t : (0, 1) \times B_n \to (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$t(r, x) = r \cdot (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x).$$

Zeigen Sie, dass für Borel-messbare Funktionen f auf $(0, \infty)$, für die $f(r)r^n$ integrierbar ist, gilt

$$\int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^n} f(\|x\|)\, \lambda^{n+1}(x) = \int_0^\infty f(r) r^n\, dr \cdot \int_{B_n} \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}\, \lambda^n(x),$$

wobei λ^n das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Bestimmen Sie mit Hilfe der Funktionen $f(r) = e^{-r^2}$ und $\chi_{(0,1)}$ den Wert von $\lambda^n(B_n)$.

65. Es seien $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < n \in \mathbb{N}$. Zeigen sie, dass ein $C > 0$ existiert, so dass für alle x, $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x - z\|^{\alpha - n} \|z - y\|^{\beta - n} \lambda(z) = C \|x - y\|^{\alpha + \beta - n},$$

wobei $\| \, . \, \|$ die Euklidische Norm und λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. (Hinweis: Untersuchen Sie das Verhalten des Integrals, wenn man x, y durch Tx, Ty ersetzt, wobei T eine Ähnlichkeitstransformation ist.)