Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

SS 2007

Übungen zu Analysis C

Blatt 2 - Abgabe bis 17.4.2007

6. Es sei S ein Simplex mit den Ecken $a_0, \ldots, a_n$, so dass sich jeder Punkt $x \in S$ eindeutig als
$$x = \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n a_n$$
mit $\lambda_0 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$ und $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1$ schreiben lässt. Für jede Permutation π der Menge $\{0, \ldots, n\}$ definiert die Bedingung
$$\lambda_{\pi(0)} \geq \lambda_{\pi(1)} \geq \cdots \geq \lambda_{\pi(n)}$$
eine Teilmenge S_π von S. Zeigen Sie, dass S_π ein Simplex mit den Ecken
$$a_{\pi(0)}, \quad \frac{a_{\pi(0)} + a_{\pi(1)}}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{\pi(0)} + a_{\pi(1)} + \cdots + a_{\pi(n)}}{n+1}$$
ist und das S die Vereinigung der Teilmengen S_π über alle Permutationen π ist.

7. Es sei $X = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre. Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen Retrakte von X sind.
$$Y_1 = \{x \in X \mid x_3 = 0\}, \quad Y_2 = \{x \in X \mid x_3 \leq 0\}, \quad Y_3 = \{(0,0,1), (0,0,-1)\}.$$
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

8. Zeigen Sie, dass eine stetige Abbildung f eines metrischen Raums X in sich genau dann eine Retraktion auf $f(X)$ ist, wenn $f \circ f = f$ gilt.

9. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe abgeschlossene Teilmenge, $x \in \mathbb{R}^n$ und $z \in K$ derart, dass für alle $y \in K$ gilt
$$(x - z) \cdot (y - z) \leq 0.$$
Zeigen Sie, dass z der Punkt in K ist, der minimalen Abstand von x hat.

10.* Zeigen Sie, dass der Vektorraum aller Nullfolgen in $\mathbb{R}$ bezüglich der Supremumsnorm vollständig ist. Geben Sie eine fixpunktfreie Selbstabbildung der Einheitskugel dieses Raumes an.