

## Übungen zu Analysis C

### Blatt 3 - Abgabe bis 24.4.2006

11. Es sei  $f$  eine konvexe differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall  $I$  und  $K = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y > f(x)\}$ . Finden Sie die Gleichung für die Stützgerade an  $K$  in einem Punkt  $(x_0, y_0)$  des Graphen von  $f$ . Begründen Sie Ihre Antwort.
12. Bestimmen Sie die Minkowskifunktionale folgender Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ :
- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ ,
  - (b)  $\text{conv}\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$ ,
  - (c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}$ ,
  - (d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ .
13. Es sei  $K$  eine konvexe Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
- (a) Die Menge  $K$  hat innere Punkte.
  - (b) Die Menge  $K$  enthält  $n + 1$  affin unabhängige Punkte.
14. Bestimmen Sie für jede der folgenden konvexen Mengen die Menge  $E$  ihrer Extrempunkte sowie die konvexe Hülle von  $E$ .
- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ ,
  - (b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 1\}$ ,
  - (c)  $\text{conv}\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,
  - (d)  $\{(x_1, x_2, \dots) \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = 1\}$ .
- 15.\* Es sei  $A$  eine Teilmenge eines normierten reellen Vektorraums  $V$  mit abgeschlossener konvexer Hülle. Zeigen Sie, dass ein Punkt  $x \in V$  genau dann zur konvexen Hülle von  $A$  gehört, wenn es für jedes stetige lineare Funktional  $L$  auf  $V$  einen Punkt  $a \in A$  mit  $L(x) \leq L(a)$  gibt.