Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

SS 2007

Übungen zu Analysis C

Blatt 4 - Abgabe bis 2.5.2007, 10 Uhr

16. Es sei M eine Teilmenge eines metrischen Raumes X, und jede Folge in M habe einen Häufungspunkt in X. Zeigen Sie, dass dann der Abschluß $\bar{M}$ folgenkompakt ist.

17. Es sei X ein kompakter metrischer Raum. Ein ε-Netz in X ist eine Teilmenge A derart, dass es für jedes $x \in X$ ein $a \in A$ mit $d(x, a) < \varepsilon$ gibt.

    Zeigen Sie, dass es in X für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz gibt. Folgern Sie, dass es in X eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

18. Es seien X und Y kompakte metrische Räume und $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $x \in X$ und $y \in Y$ schreiben wir $f_y(x) = F(x, y)$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_y \mid y \in Y\}$ in $C(X)$ gleichgradig stetig ist.

    (Hinweis: Gleichmäßige Stetigkeit.)

19. Die Abbildung A des Banachraumes $V = C([0, 1])$ in sich sei durch

$$Au(x) = \int_0^x u(y)\, dy$$

    definiert. Zeigen Sie, dass das Bild der Menge $\{u \in V \mid \|u\| \leq 1\}$ unter der Abbildung A gleichgradig stetig ist.

20.* Beweisen Sie die Umkehrung des Satzes von Arzelà-Ascoli.