Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

SS 2006

Übungen zu Analysis C

Blatt 7 - Abgabe bis 24.5.2007

31. Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring über der Menge X und $\mathcal{A} = \mathcal{R} \cup \{A^c \mid A \in \mathcal{R}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ die von $\mathcal{R}$ erzeugte Algebra über X ist.

32. Es sei μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$. Wir schreiben $A \sim B$ genau dann, wenn $\mu(A \triangle B) = 0$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

    (a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{R}$.

    (b) Die Äquivalenzklasse $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{R} \mid A \sim \emptyset\}$ enthält genau die μ-Nullmengen, und $\mathcal{N}$ ist ein Ideal von $\mathcal{R}$, d. h. ein Unterring, so dass für alle $A \in \mathcal{R}$ und $B \in \mathcal{N}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{N}$.

    (c) Für alle $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \sim B$ gilt $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B)$.

33. Beschreiben Sie die konvexe Hülle K der Menge der Punkte

$$a = (0,0,0), \quad b = (0,2,0), \quad c = (2,0,4),$$
$$d = (4,0,0), \quad e = (3,1,0), \quad f = (3,0,3)$$

durch ein System linearer Ungleichungen. Bestimmen Sie den Rauminhalt des Polyeders K.

34. Es sei K eine kompakte konvexe Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V, so dass 0 ein innerer Punkt von K ist. Beweisen Sie:

    (a) Die Menge $\hat{K} = \{l \in V^* \mid l(x) \leq 1 \text{ für alle } x \in K\}$ ist kompakt, konvex und enthält 0 als inneren Punkt.

    (b) Es gilt $\hat{\hat{K}} = K$.

    (c) Ist K ein Polyeder, so ist auch $\hat{K}$ ein Polyeder.

35.* Es sei S ein n-Simplex in $\mathbb{R}^n$ mit den Ecken $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Wir bezeichnen mit l_{ij} den Abstand von a_i und a_j und definieren $b_{ij} = -l_{ij}^2$. Schließlich setzen wir $b_{00} = 0$ und $b_{0i} = b_{i0} = 1$ für $1 \leq i \leq n+1$, so dass die b_{ij} eine quadratische $(n+2)$-reihige Matrix B bilden. Beweisen Sie, dass

$$2^n (n! \mu(S))^2 = -\det B.$$