

Übungen zu Spezielle Aspekte der Analysis

Zusatzblatt zur Wiederholung

61. Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

mit Hilfe der Substitution $u = \sqrt[3]{x}$.

62. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y \ln y}{\sin x}$$

mit dem Anfangswert $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^e$.

Hinweis: Benutzen Sie die Substitutionen $u = \ln y$ und $v = \cos x$.

63. Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 5e^t \cos t.$$

Hinweis: Suchen Sie eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz

$$x = e^t(a \cos t + b \sin t).$$

64. Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \arctan x \, dx$$

durch partielle Integration und die Substitution $u = 1 + x^2$.

65. Bestimmen Sie unter allen stetig differenzierbaren Funktionen x auf dem Intervall $[0, 1]$ mit den Randwerten

$$x(0) = \frac{1}{2} \ln 2, \quad x(1) = \frac{\pi}{4}$$

und der Eigenschaft $|\dot{x}| < \pi/2$ diejenige mit dem kleinsten Wert von

$$\int_0^1 (x - \ln \cos \dot{x}) \, dt$$

unter der Annahme, dass sie existiert.

Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis der vorangehenden Aufgabe.

Die Integrationskonstanten muss man wie in Aufgabe 60 erraten.

(So etwas wird in der Nachklausur natürlich nicht verlangt werden.)