Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2008

# Übungen zu Spezielle Aspekte der Analysis

**Blatt 1 - Abgabe bis 18.4.2008**

1. In den folgenden Aussagen bezeichnet $\varepsilon$ eine reelle Zahl und $n$, $n_0$ natürliche Zahlen. Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie gleichbedeutend damit ist, dass $a$ ein Häufungspunkt bzw. Grenzwert der Folge $x_n$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

   (a) Es gibt ein $n_0$, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \varepsilon$.

   (b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0$, so dass für alle $n > n_0$ gilt $x_n - \varepsilon \leq a < x_n + 2\varepsilon$.

   (c) Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $n_0$ gibt es ein $n \geq n_0$, so dass $|x_n - a| < \varepsilon$.

   (d) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele $n$, so dass $|x_n - a| \geq \varepsilon$.

2. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen, welche sind offen? Welche sind beides, welche keins von beiden? Begründen sie Ihre Antwort.

   (a) $(0, 1)$

   (b) $\mathbb{R}$

   (c) $(0, 1]$

   (d) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right\}$

   (e) $[0, \infty)$

3. Gegeben sei eine Folge $x_n$, deren drei Teilfolgen

$$x_{2k}, \quad x_{2k+1}, \quad x_{3k}$$

   konvergent sind. Zeigen Sie, dass dann die Folge $x_n$ ebenfalls konvergent ist. Folgt das auch, wenn nur zwei der drei angegebenen Teilfolgen konvergent sind?

4. Zeigen Sie, dass es genau eine Zahl $x \in [0, 1]$ mit der Eigenschaft $2^{-x} = x$ gibt. Bestimmen Sie diese Zahl näherungsweise mit dem Taschenrechner und beschreiben Sie Ihre Methode.

5.* Zeigen Sie, dass jede beschränkte Folge mit nur einem Häufungspunkt konvergent ist.