

Übungen zu Spezielle Aspekte der Analysis

Blatt 11 - Abgabe bis 26.6.2008

51. Prüfen Sie Satz 32 der Vorlesung in dem Spezialfall nach, dass eine der drei Zahlen α, β, γ ein Vielfaches von π ist.
52. Beweisen Sie das in der Folgerung aus Satz 32 formulierte Additionstheorem für $\Delta(\gamma)$, indem Sie das Additionstheorem für $\cos \gamma$ in die Gleichung

$$\cos \alpha \cos \beta - \Delta(\gamma) \sin \alpha \sin \beta = \cos \gamma$$

einsetzen.

53. Wir betrachten für festes $k > 0$ das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = -xz \\ \dot{z} = -k^2xy \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass für jede Lösung $(x(t), y(t), z(t))$ die Funktionen $x^2 + y^2$ und $k^2x^2 + z^2$ konstant in t sind.
- (b) Drücken Sie die Lösung mit den Anfangswerten $x(0) = 0, y(0) = 1$ und $z(0) = 1$ durch Jacobische elliptische Funktionen aus, falls $k \neq 1$.
54. Es sei 2φ der Drehwinkel eines mathematischen Pendels, beginnend in der unteren Gleichgewichtslage. Bestimmen Sie $\varphi(t)$, wenn die Anfangswerte $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = \sqrt{\frac{g}{l}}$ gegeben sind, wobei l die Pendellänge und g die Fallbeschleunigung bezeichnet.
- 55.* Lösen Sie Aufgabe 53(b) für Anfangswerte $x(0) = 0, y(0) = b, z(0) = c$, wobei b und c beliebige positive Zahlen sind.