Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2008

Übungen zu Spezielle Aspekte der Analysis

Blatt 2 - Abgabe bis 24.4.2008

6. Prüfen Sie anhand der Definition nach, an welchen Stellen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ rational ist,} \\ x^2, & \text{falls } x \text{ irrational ist,} \end{cases}$$

stetig ist.

7. Es sei I eine Menge von reellen Zahlen mit folgender Eigenschaft:

Ist $x < y < z$ und $x \in I$ und $z \in I$, dann ist auch $y \in I$.

Zeigen Sie, dass I ein Intervall ist.

(Hinweis: Betrachten Sie $\sup I$ und $\inf I$, falls sie existieren.)

8. Bestimmen Sie die kleinste obere Schranke und die größte untere Schranke der Funktionen

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}, \qquad g(x) = \frac{1 + x^2 \cos x}{2 + x^2}.$$

(Hinweis: Man betrachte die Ableitung von f.)

9. Stellen Sie für die angegebenen Folgen von Funktionen auf $[0, \infty)$ fest, ob sie punktweise konvergieren, wenn ja gegen welche Funktion, und ob sie gleichmäßig konvergieren:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x}, \qquad g_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}.$$

10.* Zeigen Sie, dass eine stetige injektive Abbildung eines Intervalls in die Menge der reellen Zahlen streng monoton ist.

("Eine" bedeutet hier wie üblich "eine jede".)