Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

SS 2008

Übungen zu Spezielle Aspekte der Analysis

Blatt 3 - Abgabe bis 2.5.2008, 8.15 Uhr

11. Zeigen Sie, dass für beliebige Funktionen f und g mit dem selben Definitionsbereich gilt
$$\big\| |f| - |g| \big\| \leq \|f - g\|.$$

12. Es sei u_n die Treppenfunktion auf $[0,1]$, die auf dem Teilintervall $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ den Wert $e^{\frac{i}{n}}$ annimmt, wobei i die Zahlen von 0 bis $n-1$ durchläuft, und es sei $u_n(1) = e$.

    Zeigen Sie, dass die Folge u_n gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion zur Basis e konvergiert. Berechnen Sie die Zahlen $a_n = \int_0^1 u_n(x)\,dx$ und den Grenzwert der Folge a_n.

13. Prüfen Sie nach, dass die Identität
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx,$$
die in der Vorlesung unter der Voraussetzung $a \leq b \leq c$ bewiesen wurde, auch ohne diese Voraussetzung gilt, wenn f eine Regelfunktion auf einem Intervall ist, das a, b und c enthält.

14. Für jede natürliche Zahl n sei eine Treppenfunktion u_n auf $[0,1]$ gegeben durch
$$u_n(x) = \begin{cases} n, & \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \text{ oder } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$
Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert f der Folge u_n. Konvergiert die Zahlenfolge $\int_0^1 u_n(x)\,dx$ gegen die Zahl $\int_0^1 f(x)\,dx$?

15.* Es sei f eine stetige Funktion auf $[a,b]$ derart, dass $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle hat.