

Übungen zu Spezielle Aspekte der Analysis

Blatt 4 - Abgabe bis 8.5.2008

16. Es sei m_1 der Mittelwert der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ und m_2 ihr Mittelwert auf dem Intervall $[b, c]$, wobei $a < b < c$. Drücken Sie den Mittelwert von f auf dem Intervall $[a, c]$ durch m_1 , m_2 , a , b und c aus.

17. Die Anziehungskraft zwischen zwei rotationssymmetrischen Körpern mit den Massen m_1 und m_2 ist durch das Gravitationsgesetz

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

gegeben, wobei r ihren Abstand und γ die Gravitationskonstante bezeichnet. Geben Sie eine Formel für die Hubarbeit beim Heben eines Körpers von der Höhe r_1 auf die Höhe r_2 (jeweils gemessen vom Erdmittelpunkt) an.

18. Es seien a_1, a_2, \dots, a_n reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx = 0$$

mindestens eine Lösung $x \in (0, \pi)$ hat. (Hinweis: Finden Sie eine Stammfunktion für $\cos nx$. Wenden Sie den Mittelwertsatz an.)

19. Archimedes hat bewiesen, dass ein Parabelbogen, der durch die Endpunkte einer Seite eines Rechtecks geht und dessen Scheitelpunkt der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Rechteckseite ist, genau $\frac{2}{3}$ der Rechtecksfläche umschließt. Überprüfen Sie sein Ergebnis mit Hilfe der Integralrechnung.

20.* Es sei f eine stetige Funktion auf \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^x f(t)(x-t) dt = \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du.$$

(Hinweis: Bestimmen Sie die Ableitungen beider Seiten.)