

Übungen zu Spezielle Aspekte der Analysis

Blatt 7 - Abgabe bis 30.5.2008

31. Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die durch die Abbildung $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t),$$

gegeben ist.

32. Ein Punkt bewegt sich in der Ebene \mathbb{R}^2 mit dem zeitabhängigen Geschwindigkeitsvektor $(t \cos t, t \sin t)$. Wenn er sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Koordinatenursprung befindet, wo befindet er sich zum Zeitpunkt T , und welche Strecke hat er dann zurückgelegt?
33. Es sei K der geometrische Ort aller Punkte der Ebene \mathbb{R}^2 , deren Abstand vom Koordinatenursprung gleich dem e -fachen des Abstandes von der Geraden $x = p$ ist, wobei e und p feste positive Zahlen sind.

- (a) Finden Sie eine algebraische Gleichung, die die Kurve K beschreibt.
(b) Zeigen Sie, dass Punkte mit den Polarkoordinaten (r, φ) auf K liegen, falls

$$r(1 + e \cos \varphi) = ep.$$

Wie kann man die Fälle mit $r < 0$ interpretieren?

- (c) Zeigen Sie, dass K im Fall $e < 1$ eine Ellipse ist. Was ist K in den Fällen $e = 1$ bzw. $e > 1$?
34. Führen Sie das elliptische Integral

$$\int \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} dx$$

durch eine geeignete Substitution auf ein elliptisches Integral zurück, bei dem unter der Wurzel ein kubisches Polynom steht.

- 35.* Führen Sie das unbestimmte Integral

$$\int (1 + x^6)^{-1/3} dx$$

für $x > 0$ durch die Substitution $x^3 + x^{-3} = 2t^{-3/2}$ auf ein elliptisches Integral zurück.