

Klausur „Spezielle Aspekte der Analysis“

1. Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$$

mit Hilfe der Substitution $u = \sqrt[3]{x}$ und partieller Integration.

2. Ein Punkt bewegt sich in der Ebene mit dem zeitabhängigen Geschwindigkeitsvektor $(\sin t, 1 - \cos t)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet er sich im Koordinatenursprung.
- (a) Wo befindet er sich zum Zeitpunkt 2π ?
 - (b) Wie lang ist dann der zurückgelegte Weg?
 - (c) Welche Fläche hat dann die Verbindungsstrecke des bewegten Punktes mit dem Koordinatenursprung überstrichen?

Hinweis: Drücken Sie $\cos t$ in Teil (b) durch $\sin \frac{t}{2}$ aus, und benutzen Sie in Teil (c) partielle Integration.

3. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$(x + 1)y' = \sqrt{1 - y^2}$$

mit dem Anfangswert $y(0) = \frac{1}{2}$.

4. Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$4\ddot{x} - 4\dot{x} + x = 25 \cos t.$$

Hinweis: Suchen Sie eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz

$$x = a \cos t + b \sin t.$$

5. Bestimmen Sie unter allen stetig differenzierbaren Funktionen x auf dem Intervall $[1, 2]$ mit den Randwerten

$$x(1) = 0, \quad x(2) = 7$$

diejenige mit dem kleinsten Wert von

$$\int_1^2 (t^2 \dot{x}^2 + 2x^2) dt$$

unter der Annahme, dass sie existiert.

Hinweis: Suchen Sie Lösungen der Eulerschen Differentialgleichung mit dem Ansatz $x(t) = t^n$ und beachten Sie, dass es sich um eine lineare Differentialgleichung handelt.