Universität Bielefeld SS 2008
Prof. W. Hoffmann

Nachklausur „Spezielle Aspekte der Analysis“

1. Berechnen Sie das unbestimmte Integral
$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 3}$$
mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

2. Bestimmen Sie für jede natürliche Zahl n das Maximum der Funktion
$$f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{n}}$$
auf dem Intervall $[0, \infty)$. Zeigen Sie, dass für $n \geq 2x$ gilt
$$f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}.$$
Stellen Sie fest, ob die Folge der Funktionen f_n punktweise konvergiert, wenn ja, gegen welche Funktion, und ob die Konvergenz gleichmäßig ist.

3. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung
$$y'\sqrt{x^2 + 1} = x(y^2 + 1)$$
mit dem Anfangswert $y(0) = 1$.

4. Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$2\ddot{x} + 3\dot{x} - 2x = 5e^{-2t}.$$
Hinweis: Suchen Sie eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz
$$x = ate^{-2t}.$$

5. Bestimmen Sie unter allen stetig differenzierbarten Funktionen x auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ mit den Randwerten
$$x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
diejenige mit dem kleinsten Wert von
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 + t\dot{x} - x^2)\, dt$$
unter der Annahme, dass sie existiert.

   Hinweis: Die Eulerschen Differentialgleichung besitzt eine konstante partikuläre Lösung.