# Scriptum zur Vorlesung
# Spezielle Aspekte der Analysis

Prof. W. Hoffmann

SS 2008

## 1 Häufungspunkte

Im Folgenden betrachten wir unendliche Zahlenfolgen $x_1$, $x_2$, $x_3$, ... Häufig bezeichnen wir das allgemeine Glied mit $x_n$ und sprechen von der Folge $x_n$.

**Definition 1** *Eine reelle Zahl $a$ heißt Häufungspunkt der Folge $x_n$ reeller Zahlen, wenn es für jede positive Zahl $\varepsilon$ unendlich viele natürliche Zahlen $n$ gibt, so dass $|x_n - a| < \varepsilon$.*

*Beispiel (a).* Die Folge 0, 0, 0, ... hat nur den Häufungspunkt 0.
*Beispiel (b).* Die Folge 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n}$, ... hat den Häufungspunkt 0, denn ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so gilt $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ für alle $n$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Eine Zahl $a \neq 0$ ist kein Häufungspunkt, denn ist $0 < \varepsilon < |a|$, so gibt es nur endlich viele $n$ mit $|\frac{1}{n} - a| < \varepsilon$. Nach der Dreiecksungleichung gilt dann nämlich

$$|a - 0| \leq \left|a - \tfrac{1}{n}\right| + \left|\tfrac{1}{n} - 0\right|,$$

also

$$|a| < \varepsilon + \frac{1}{n}, \qquad n > \frac{1}{|a| - \varepsilon}.$$

*Beispiel (c).* Die Folge 1, $-1$, 1, $-1$, ... hat die Häufungspunkte 1 und $-1$.
*Beispiel (d).* Die Folge der natürlichen Zahlen hat keinen Häufungspunkt.
*Beispiel (e).* Für jede reelle Zahl $x$ bezeichnen wir mit $[x]$, die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $x$ ist, und setzen $\{x\} = x - [x]$. (Aus dem Zusammenhang ergibt sich, dass nicht die Einermenge mit dem Element $x$ gemeint ist.) Wir halten eine irrationale Zahl $c$ fest und setzen

$$x_n = \{nc\}.$$

Wir zeigen in einer Reihe von Schritten, dass jede Zahl des Intervalls $[0, 1]$ ein Häufungspunkt der Folge ist.

Wäre $x_m = x_n$ für $m \neq n$, so wäre $nc - mc = k \in \mathbb{Z}$, also $c = \frac{k}{n-m}$ im Widerspruch zur Irrationalität von $c$. Also sind sämtliche Folgeglieder verschieden.

Die ersten $N - 1$ Glieder der Folge teilen das Intervall $[0, 1]$ in $N$ Teilintervalle, deren Längen sich zu 1 summieren. Also muss wenigstens eines von ihnen eine Länge kleiner oder gleich $\frac{1}{N}$ haben, das heißt, es gibt $m$ und $n$, so dass

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{N}.$$

Wir bezeichnen die linke Seite mit $h$ und setzen $p = |m - n|$. Aus der Definition von $x_n$ folgt, dass $h = |pc - k|$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Für alle natürlichen Zahlen $l$ mit $1 \leq l \leq \frac{1}{h}$ ist nun $|l(pc - k)| \leq 1$, also

$$x_{lp} = \begin{cases} l(pc - k) = lh, & \text{falls } pc - k > 0, \\ l(pc - k) + 1 = 1 - lh, & \text{falls } pc - k < 0. \end{cases}$$

Diese Folgeglieder teilen das Intervall $[0, 1]$ in Intervalle der Länge höchstens $\frac{1}{N}$.

Sind $a \in [0, 1]$ und $0 < \varepsilon < 1$ beliebig, so hat das Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap [0, 1]$ mindestens die Länge $\varepsilon$. Die Anzahl der Glieder $x_{lp}$ mit $1 \leq l \leq \frac{1}{h}$, die in diesem Intervall liegen, ist also nicht kleiner als $N\varepsilon$. Da wir $N$ unabhängig von $a$ und $\varepsilon$ wählen können, ist die Anzahl der $n$ mit der Eigenschaft $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ größer als jede Zahl der Form $N\varepsilon$, das heißt unendlich. Somit ist $a$ ein Häufungspunkt.

**Definition 2** *Eine Intervallschachtelung ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen*

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supseteq \ldots$$

*mit der Eigenschaft, dass es zu jeder positiven Zahl $\varepsilon$ eine natürliche Zahl $k$ gibt, so dass $b_k - a_k < \varepsilon$.*

Irrationalzahlen kann man durch Intevallschachtelungen charakterisieren. Ein unendlicher Dezimalbruch liefert uns z. B. eine Intervallschachtelung, in der die Länge eines Intervalls jeweils ein Zehntel der Länge des vorigen Intervalls ist.

**Satz 0** *Für jede Intervallschachtelung gibt es eine genau reelle Zahl, die in allen ihren Intervallen enthalten ist.*

Dieser Satz wird im Rahmen der Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen bewiesen. In gewisser Weise werden die reellen Zahlen gerade so konstruiert, dass dieser Satz gilt. Wir werden ihn hier nicht beweisen.

Zumindest ist klar, dass es keine verschiedenen Zahlen $x < y$ geben kann, die in allen Intervallen enthalten sind, denn nach Definition gibt es ein Intervall $[a_k, b_k]$, dessen Länge $b_k - a_k$ kleiner als die positive Zahl $y - x$ ist.

**Satz 1 (Bolzano-Weierstraß)** *Eine beschränkte Folge reeller Zahlen hat mindestens einen Häufungspunkt.*

*Beweis.* Die Voraussetzung, dass unsere Folge $x_n$ beschränkt ist, besagt dass es Zahlen $a_0$ und $b_0$ gibt, so dass für alle $n$ gilt $x_n \in [a_0, b_0]$.

Der Mittelpunkt $m_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ des Intervalls teilt es in zwei Teilintervalle $[a_0, m_0]$ und $[m_0, b_0]$ von der halben Länge. Wenigstens eines von ihnen muss unendlich viele Glieder der Folge enthalten (in dem Sinne, dass es die Zahlen $x_n$ für unendlich viele $n$ enthält). Wir wählen ein solches Teilintervall aus und bezeichnen es mit $[a_1, b_1]$. Wir folgern mit dem gleichen Argument, dass das linke oder das rechte Halbintervall von $[a_1, b_1]$ unendlich viele Folgeglieder enthalten muss. So fortfahrend erhalten wir eine Folge von Intervallen $[a_k, b_k]$ der Länge $\frac{b_0-a_0}{2^k}$, die jeweils unendlich viele Glieder $x_n$ enthalten.

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k$, so dass $2^k > \frac{b_0-a_0}{\varepsilon}$, das heißt $b_k - a_k < \varepsilon$. Also haben wir eine Intervallschachtelung, und nach Satz 0 gibt es eine Zahl $c$, die für jedes $k$ in $[a_k, b_k]$ enthalten ist.

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so wählen wir ein $k$ derart, dass $b_k - a_k < \varepsilon$. Zwei beliebige Elemente des Intervalls $[a_k, b_k]$ haben dann höchstens den Abstand $\varepsilon$. Nach Konstruktion gilt $x_n \in [a_k, b_k]$ für unendlich viele $n$, und für diese folgt $|x_n - c| < \varepsilon$. □

In Beispiel (e) liegen alle Glieder der Folge in dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$. Folgt daraus, dass auch alle Häufungspunkte in diesem Intervall liegen müssen?

**Definition 3** *Eine Menge $A$ reeller Zahlen heißt abgeschlossen, wenn für jede Folge in $A$ auch jeder Häufungspunkt der Folge in $A$ liegt.*

*Einen Menge $U$ reeller Zahlen heißt offen, wenn es für jedes Element $u$ von $U$ ein $\varepsilon$ gibt, so dass jede Zahl $x$ mit der Eigenschaft $|x - u| < \varepsilon$ in $U$ liegt.*

**Satz 2** *Eine Menge $A$ ist genau dann abgeschlossen, wenn die Menge $U = \mathbb{R} \setminus A$ (genannt die Komplementärmenge von $A$) offen ist.*

Man kann sich leicht überzeugen, dass die Komplementärmenge eines abgeschlossenen Intervalls eine offene Menge ist. Nach dem Satz ist ein abgeschlossenes Intervall also eine abgeschlossene Menge, und die Antwort auf die obige Frage lautet “Ja”.

*Beweis.* Ist $U$ offen, so kann ein Element $u$ von $U$ kein Häufungspunkt einer Folge $x_n$ von Elementen von $A$ sein, denn ist $\varepsilon$ wie in der Definition der offenen Menge, so gibt es kein $n$ mit der Eigenschaft $|x_n - u| < \varepsilon$. Also liegen alle Häufungspunkte in $A$.

Umgekehrt sei $A$ abgeschlossen und $u$ ein beliebiger Punkt von $U$. Wir nehmen das Gegenteil der gewünschten Eigenschaft von $u$ an, dass es also kein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass alle Zahlen $x$ mit der Eigenschaft $|x - u| < \varepsilon$ in $U$ liegen. Mit anderen Worten, ganz gleich, welches $\varepsilon > 0$ wir wählen, es soll immer ein $x$ mit der Eigenschaft $|x-u| < \varepsilon$ geben, das nicht in $U$, sondern in $A$ liegt. Insbesondere gibt es dann für jedes $n$ ein $x_n \in A$ mit der Eigenschaft

$$|x_n - u| < \frac{1}{n}.$$

Dann ist aber $u$ ein Häufungspunkt der Folge $x_n$ im Widerspruch zur Abgeschlossenheit von $A$. Unsere Annahme war also falsch. $\square$

# 2 Grenzwerte

Die intuitive Vorstellung, dass eine Folge gegen einen Grenzwert strebt, wenn ihre Glieder dem Grenzwert beliebig nahe kommen und letztendlich auch beliebig nahe bleiben, wird wie folgt präzisiert.

**Definition 4** *Die Zahl $a$ heißt Grenzwert der Folge $x_n$, wenn es für jede positive Zahl $\varepsilon$ eine natürliche Zahl $n_0$ gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $n$, die größer oder gleich $n_0$ sind, die Ungleichung $|x_n - a| < \varepsilon$ gilt. Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, nennt man konvergent.*

Natürlich ist jeder Grenzwert ein Häufungspunkt. Eine Folge kann nicht zwei verschiedene Grenzwerte $a_1$ und $a_2$ haben, denn setzen wir $\varepsilon = \frac{|a_1 - a_2|}{2}$, so muss es nach Definition ein $n_1$ geben, so dass $|x_n - a_1| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$, und es muss ein $n_2$ geben, so dass $|x_n - a_2| < \varepsilon$ für $n \geq n_2$. Ist nun $n_0$ die größere der beiden Zahlen $n_1$ und $n_2$, so gilt für $n \geq n_0$

$$|a_1 - a_2| \leq |a_1 - x_n| + |x_n - a_2| < 2\varepsilon$$

im Widerspruch zur Wahl von $\varepsilon$. Der Grenzwert einer konvergenten Folge $x_n$ ist also eindeutig bestimmt, und man bezeichnet ihn mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Lassen wir aus einer Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ eine beliebige Anzahl von Gliedern weg, so verbleibt eine Teilfolge, z. B. $x_2, x_7, x_{24}, \ldots$ Die hier vorkommenden Indices (in unserem Beispiel sind das 2, 7, 24, ...) bilden eine monoton wachsende Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$ von natürlichen Zahlen. Direkt aus der Definition folgt: Ist eine Zahl Grenzwert einer Folge, so ist sie auch Grenzwert einer jeden Teilfolge dieser Folge.

**Satz 3** *Eine Zahl ist genau dann Häufungspunkt einer Folge, wenn sie Grenzwert einer Teilfolge ist.*

*Beweis.* Ist $a$ Grenzwert (also auch Häufungspunkt) einer Teilfolge von $x_n$, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Glieder der Teilfolge, die in der $\varepsilon$-Umgebung von $a$ liegen. Diese sind auch Glieder der Folge $x_n$, also ist $a$ Häufungspunkt dieser Folge.

Umgekehrt sei $a$ ein Häufungspunkt der Folge $x_n$. Dann gibt es unendlich viele natürliche Zahlen $n$, so dass $|x_n - a| < 1$, und von diesen $n$ wählen wir ein $n_1$. Weiter gibt es unendlich viele $n$, so dass $|x_n - a| < \frac{1}{2}$, und von diesen wählen wir ein $n_2$, das größer ist als $n_1$. So fortfahrend finden wir eine monoton wachsende Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots$, so dass

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}.$$

Man prüft an Hand der Definition nach, dass $a$ Grenzwert der Teilfolge $x_{n_k}$ ist. $\square$

Um an Hand der Definition zu prüfen, ob eine Folge konvergent ist, müsste man für jede reelle Zahl feststellen, ob sie Grenzwert ist. Konvergenzkriterien ersparen das Durchprüfen dieser unendlich vielen Möglichkeiten. Das universellste Kriterium geht auf Cauchy zurück.

**Definition 5** *Eine Folge $x_n$ heißt Cauchy-Folge, wenn es für jede positive Zahl $\varepsilon$ eine natürliche Zahl $n_0$ gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $m$ und $n$, die beide größer oder gleich $n_0$ sind, die Ungleichung $|x_m - x_n| < \varepsilon$ gilt.*

**Satz 4** *Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

*Beweis.* Angenommen, die Folge $x_n$ ist konvergent. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es ein $n_0$, so dass $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_0$. Ist nun $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$, so folgt

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also ist die Folge eine Cauchy-Folge.

Umgekehrt sei $x_n$ eine Cauchy-Folge. Dann gibt es ein $n_1$, so dass für $n \geq n_1$ gilt $|x_n - x_{n_1}| < 1$. Die Folge ist also von oben durch $x_{n_1} + 1$ und von unten durch $x_{n_1} - 1$ beschränkt. Außerdem gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0$, so dass für alle $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ gilt $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nach Satz 1 hat die Folge einen Häufungspunkt $a$. Daraus folgt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele $m$ gibt, so dass $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wählen wir ein solches $m$, das größer als $n_0$ ist, so folgt für $n \geq n_0$, dass

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_m| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist die Folge konvergent. $\square$

*Bemerkung.* Für die Konvergenz genügt es nicht, zu verlangen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0$ existiert, so dass $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$, wie das Beispiel $x_n = \sqrt{n}$ lehrt: Obwohl

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

ist die Folge divergent (d. h. nicht konvergent).

Wir beweisen nun, dass jede Kontraktion eines abgeschlossenen Intervalls genau einen Fixpunkt hat. Der Beweis liefert gleichzeitig eine Näherungsmethode für die Berechnung des Fixpunktes.

**Satz 5** *Es sei $0 \leq C < 1$ und $f$ eine Abbildung des Intervalls $[a, b]$ in sich selbst mit der Eigenschaft, dass*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \tag{1}$$

*für alle $x$, $y \in [a, b]$. Dann gibt es genau ein $c \in [a, b]$, so dass $f(c) = c$.*

*Beweis.* Es sei $x_0 \in [a, b]$ beliebig. Wir definieren eine Folge $x_n$ rekursiv durch $x_{n+1} = f(x_n)$. Wiederholte Anwendung von (1) ergibt

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq C|x_n - x_{n-1}| \\ &\leq C^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq C^n|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Ist nun $m > n$, so folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (C^{m-1} + C^{m-2} + \cdots + C^n)|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Nach der Summenformel für geometrische Folgen ist

$$C^{m-1} + C^{m-2} + \cdots + C^n = \frac{C^m - C^n}{C - 1} \leq \frac{C^n}{1 - C},$$

wobei wir benutzt haben, dass $C^m > 0$ und $1 - C > 0$. Ist nun $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es wegen $0 < C < 1$ ein $n_0$, so dass für $n \geq n_0$ gilt

$$C^n < \frac{\varepsilon(1 - C)}{|x_1 - x_0|}.$$

Somit ist $|x_m - x_n| < \varepsilon$ für alle $m$ und $n$ mit $m \geq n \geq n_0$. Dasselbe gilt bei Vertauschung von $m$ und $n$, also ist die Folge $x_n$ eine Cauchy-Folge und hat nach Satz 4 einen Grenzwert $c$. Da das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen ist, liegt $c$ in $[a, b]$.

Um zu zeigen, dass $c$ ein Fixpunkt ist, bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} |f(c) - c| &\leq |f(c) - f(x_n)| + |f(x_n) - x_n| + |x_n - c| \\ &\leq (C + 1)|x_n - c| + C^n|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

für alle $n$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, dann finden wir ein $n_0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|x_n - c| < \frac{\varepsilon}{2(C + 1)}, \qquad C^n < \frac{\varepsilon}{2|x_1 - x_0|},$$

so dass $|f(c) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Da $\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl war, folgt $|f(c) - c| = 0$, also $f(c) = c$.

Sind $c_1$ und $c_2$ Fixpunkte von $f$, so ist

$$|c_1 - c_2| = |f(c_1) - f(c_2)| \leq C|c_1 - c_2|, \qquad \text{also} \qquad (1 - C)|c_1 - c_2| = 0.$$

Wegen $1 - C > 0$ folgt $|c_1 - c_2| = 0$, also $c_1 = c_2$. □

*Bemerkung.* Ist die Funktion $f$ auf dem Intervall $(a, b)$ differenzierbar und gilt $|f'(x)| \leq C$ für alle $x \in (a, b)$, so erfüllt $f$ die Kontraktionsbedingung (1) in Satz 5 mit dieser Konstanten $C$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es nämlich für beliebige $x < y$ im Intervall $[a, b]$ ein $z \in (x, y)$, so dass

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y).$$

Nehmen wir auf beiden Seiten den absoluten Betrag, so folgt (1).

# 3 Stetigkeit

Wir erinnern zunächst an die Definition dieses wichtigen Begriffs.

**Definition 6** *Eine Funktion $f$ mit dem Definitionsbereich $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $c$, wenn es für jede positive Zahl $\varepsilon$ eine positive Zahl $\delta$ gibt, so dass für alle $x \in X$ mit der Eigenschaft $|x - c| < \delta$ gilt $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.*

*Eine Funktion heißt stetig, wenn sie an allen Stellen ihres Definitionsbereiches stetig ist.*

**Satz 6** *Die Summe, das Produkt und die Verkettung von stetigen Funktionen sind stetig. Der Quotient von stetigen Funktionen ist stetig, wenn die Funktion im Nenner keine Nullstelle hat.*

Dieser Satz ist aus der Vorlesung "Funktionen" bekannt und wird hier nicht bewiesen.

Bei der Berechnung von Grenzwerten vertauscht man mitunter die Reihenfolge von Grenzübergang und Berechnung des Funktionswertes, z. B.

$$\lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{n} = \cos \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \cos 0 = 1.$$

Ersetzt man hier die Funktion cos durch die Funktion sgn, so erhält man ein falsches Ergebnis, weil die Vorzeichenfunktion sgn an der Stelle 0 nicht stetig ist. Genauer gilt

**Satz 7** *Eine Funktion $f$ ist genau dann stetig an der Stelle $a$, wenn für jede Folge $x_n$ im Definitionsbereich, die gegen $a$ konvergiert, die Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ gegen $f(a)$ konvergiert.*

*Beweis.* Angenommen, $f$ ist stetig an der Stelle $a$, und es sei eine Folge $x_n$ in $X$ gegeben, die gegen $a$ konvergiert. Ist $\varepsilon > 0$, so gehört dazu nach der Definition der Stetigkeit ein $\delta > 0$. Zu diesem gibt es nach Definition der Konvergenz von Folgen wiederum ein $n_0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \delta$. Für diese $n$ ist dann $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$, das heißt, die Folge $f(x_n)$ konvergiert gegen $f(a)$.

Ist hingegen $f$ an der Stelle $a$ nicht stetig, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ ein $x \in X$ exitiert, für das zwar $|x - a| < \delta$, aber nicht $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ gilt. Insbesondere finden wir für jede natürliche Zahl $n$ ein $x_n \in X$, so dass $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Somit konvergiert die Folge $x_n$ gegen $a$, aber die Folge $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(a)$. Die im Satz angegebene Eigenschaft gilt dann also nicht für alle Folgen, wie zu beweisen war. □

Ein wichtiges Ergebnis über stetige Funktionen ist der Zwischenwertsatz. Für seinen Beweis brauchen wir den Begriff der kleinsten oberen Schranke. Eine obere Schranke einer Menge reeller Zahlen ist eine reelle Zahl, die größer oder gleich als alle ihre Elemente ist. Im Bereich der rationalen Zahlen braucht es unter allen oberen Schranken einer Menge keine kleinste zu geben, wie das Beispiel der Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ zeigt.

**Satz 8** *Jede von oben beschränkte nichtleere Menge reeller Zahlen hat eine kleinste obere Schranke in* $\mathbb{R}$.

*Beweis.* Es sei $a_0$ ein Element und $b_0$ eine obere Schranke der gegebenen Menge $M$. Von den beiden Halbintervallen $[a_0, m_0]$ und $[m_0, b_0]$ wählen wir das erstere, falls $m_0$ eine obere Schranke ist, andernfalls das letztere, und bezeichnen es mit $[a_1, b_1]$. So fortfahrend, erhalten wir eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$, wobei jedes dieser Intervalle ein Element von $M$ enthält und jedes $b_n$ eine obere Schranke ist. Nach Satz 0 gibt es eine Zahl $s$, die in allen diesen Intervallen enthalten ist.

Ist $x > s$, dann gibt es ein $n$, so dass $b_n - a_n < x - s$ und somit $b_n < x$. Da $b_n$ eine obere Schranke von $M$ ist, kann $x$ kein Element von $M$ sein. Somit ist $s$ eine obere Schranke von $M$.

Ist $x < s$, dann gibt es ein $n$, so dass $b_n - a_n < s - x$ und somit $a_n > x$. Da das Intervall $[a_n, b_n]$ ein Element von $M$ enthält, ist $x$ keine obere Schranke von $M$. Somit ist $s$ die kleinste obere Schranke. □

Die kleinste obere Schranke einer Menge $M$ bezeichnet man auch als das Supremum, die größte untere Schranke als das Infimum von $M$, abgekürzt $\sup M$ und $\inf M$.

**Satz 9 (Zwischenwertsatz)** *Ist die Funktion $f$ stetig auf $[a, b]$ und gilt $f(a) \leq d \leq f(b)$, so gibt es eine Zahl $c \in [a, b]$, so dass $f(c) = d$.*

Der Beweis wurde nicht vorgetragen, sei aber der Vollständigkeit halber hier angeführt.

*Beweis.* Es sei $M = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq d\}$ und $c = \sup M$. Wegen $a \in M$ gilt $c \geq a$, und da $b$ eine obere Schranke von $M$ ist, gilt $c \leq b$.

Angenommen, $f(c) < d$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - c| < \delta$ gilt $|f(x) - f(c)| < d - f(c)$, also $f(x) < d$. Es folgt, dass alle Elemente der $\delta$-Umgebung von $c$ zu $M$ gehören, so dass jede obere Schranke größer oder gleich $c + \delta$ ist. Dies steht im Widerspruch zur Definition von $c$, also war unsere Annahme falsch.

Angenommen, $f(c) > d$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - c| < \delta$ gilt $|f(x) - f(c)| < f(c) - d$, also $f(x) > d$. Es folgt, dass die $\delta$-Umgebung von $c$ keine Elemente von $M$ enthält, so dass $c - \delta$ eine obere Schranke von $M$ ist. Dies steht im Widerspruch zur Definition von $c$, also war auch die zweite Annahme falsch. □

**Satz 10** *Jede stetige Funktion auf einer nichtleeren beschränkten abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist beschränkt, und sie hat einen größten sowie einen kleinsten Wert.*

*Beweis.* Angenommen, die Funktion $f$ ist nicht von oben beschränkt. Dann gibt es für jede natürliche Zahl $n$ ein $x_n$ im Definitionsbereich $X$ von $f$, so dass $f(x) > n$. Da $X$ beschränkt ist, hat nach Satz 1 die Folge $x_n$ einen Häufungspunkt $a$, und da $X$ abgeschlossen ist, gilt $a \in X$. Wegen der Stetigkeit der Funktion gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ mit der Eigenschaft $|x-a| < \delta$ gilt $|f(x)-f(a)| < 1$, also $f(x) < f(a)+1$. Für natürliche Zahlen $n \geq f(a)+1$ kann also $x_n$ nicht in der $\delta$-Umgebung von $a$ liegen. Da aber $a$ ein Häufungspunkt ist, haben wir einen Widerspruch, und unsere Annahme war falsch. Die Funktion ist also von oben beschränkt, und analog zeigt man ihre Beschränktheit von unten.

Es sei $s$ die kleinste obere Schranke von $f$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke, also gibt es ein $x_n \in X$, so dass $f(x_n) > s - \frac{1}{n}$. Wie oben sehen wir, dass die Folge $x_n$ einen Häufungspunkt $a \in X$ besitzt. Angenommen, $f(a) < s$. Dann ist $\varepsilon = \frac{s-f(a)}{2} > 0$. Wegen der Stetigkeit von $f$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ mit der Eigenschaft $|x-a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, und wegen

$$|s - f(x)| + |f(x) - f(a)| \geq |s - f(a)| = 2\varepsilon$$

folgt dann $s - f(x) > \varepsilon$. Somit kann kein $x_n$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ in der $\delta$-Umgebung von $a$ liegen. Da aber $a$ ein Häufungspunkt ist, haben wir einen Widerspruch, und unsere Annahme war falsch. Es gilt also $f(a) = s$, und $s$ ist der größte Wert von $f$. Analog zeigt man die Existenz eines kleinsten Wertes. $\square$

# 4 Gleichmäßige Konvergenz

Wir betrachten Folgen von Funktionen $f_n$, die alle den selben Definitionsbereich $X$ haben. Wenn an jeder Stelle $x \in X$ die Zahlenfolge $f_n(x)$ konvergiert, so können wir den Grenzwert, der ja von $x$ abhängt, mit $f(x)$ bezeichnen und erhalten so eine Funktion $f$ auf $X$. Wir sagen dann, dass die Folge der Funktionen $f_n$ gegen die Funktion $f$ konvergiert.

Man kann z. B. beweisen, dass für alle reellen Zahlen gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Die Folge der Funktionen $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ konvergiert also gegen die Exponentialfunktion mit der Eulerschen Zahl $e$ als Basis.

Wenn eine Folge stetiger Funktionen $f_n$ gegen eine Funktion $f$ konvergiert, so braucht $f$ nicht stetig zu sein. Betrachten wir z. B. die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n|x|}.$$

Zähler und Nenner sind stetige Funktionen, und der Nenner hat keine Nullstellen, also ist $f_n$ nach Satz 6 eine stetige Funktion. Für $x > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + x} = 1,$$

für $x < 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n} - x} = -1,$$

und für $x = 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Die Grenzwertfunktion ist also $\operatorname{sgn} x$, und sie ist an der Stelle 0 nicht stetig. Es gibt aber eine Art der Konvergenz, bei der sich die Stetigkeit auf die Grenzwertfunktion überträgt.

**Definition 7** *Eine Folge von Funktionen $f_n$ auf dem Definitionsbereich $X$ konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion $f$, wenn es für jede positive Zahl $\varepsilon$ eine natürliche Zahl $n_0$ gibt, so dass für alle $n$, die größer als $n_0$ sind, und für alle $x \in X$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Zur Unterscheidung bezeichnet man die vorher betrachtete Art der Konvergenz von Funktionenfolgen auch als punktweise Konvergenz. Jede gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen ist selbstverständlich auch punktweise konvergent, aber nicht umgekehrt. So ist beispielsweise die Folge $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ nicht gleichmäßig konvergent, denn für jedes $n$ findet man ein $x$, so dass $|f_n(x) - e^x| \geq 1$. Wählt man z. B. $x = -3n$, so ist $f_n(x) = (-2)^n$, aber $|e^x| < 1$.

**Satz 11** *Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen $f_n$ gegen eine Funktion $f$, so ist $f$ ebenfalls stetig.*

*Beweis.* Wir beweisen die Stetigkeit von $f$ an einer Stelle $a$ des Definitionsbereiches $X$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz ein $n$, so dass für alle $x \in X$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

und wegen der Stetigkeit von $f_n$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ mit der Eigenschaft $|x - a| < \delta$ gilt

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für diese $x$ gilt dann auch

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

und die Stetigkeit von $f$ an der Stelle $a$ folgt. □

Für beschränkte Funktionen lässt sich die gleichmäßige Konvergenz bequem durch die Norm von Funktionen ausdrücken. Wir erinnern daran, dass man das Supremum der Menge der Werte einer Funktion $f$ auch als Supremum der Funktion $f$ bezeichnet, abgekürzt $\sup f$.

**Definition 8** *Die Norm einer beschränkten Funktion $f$ ist die kleinste obere Schranke der Absolutbeträge ihrer Werte, abgekürzt*

$$\|f\| = \sup|f|.$$

Man nennt dies auch die Supremumsnorm zur Unterscheidung von anderen Normen, die allerdings in dieser Vorlesung nicht vorkommen werden. Sie erfüllt die Dreiecksungleichung

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

für alle Funktionen $f$ und $g$ auf einer Menge $X$, denn für alle $x \in X$ gilt nach der Dreiecksungleichung für Zahlen $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, und hier ist die rechte Seite beschränkt durch $\|f\| + \|g\|$.

Es ist leicht zu sehen, dass eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n$ genau dann gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion $f$ konvergiert, wenn es für jede positive Zahl $\varepsilon$ eine natürliche Zahl $n_0$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Auch für die gleichmäßige Konvergenz gibt es ein Cauchy-Kriterium.

**Satz 12** *Eine Folge von beschränkten Funktionen ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge bezüglich der Norm ist.*

*Beweis.* Die Behauptung, dass jede gleichmäßig konvergente Folge eine Cauchy-Folge bezüglich der Norm ist, beweist man genau wie die analoge Behauptung von Satz 4, wobei man den Absolutbetrag von Zahlen durch die Norm von Funktionen ersetzt.

Zum Beweis der Umkehrung nehmen wir also an, es sei eine Folge von Funktionen $f_n$ auf $X$ gegeben, die eine Cauchyfolge bezüglich der Norm ist. Dann ist für jedes $x \in X$ die Zahlenfolge $f_n(x)$ eine Cauchy-Folge bezüglich des Absolutbetrages, also nach Satz 4 konvergent. Wir bezeichnen ihren Grenzwert mit $f(x)$. Auf diese Weise erhalten wir eine Funktion $f$ auf $X$.

Die Voraussetzung, dass die Folge $f_n$ eine Cauchy-Folge ist, bedeutet, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ gilt

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon.$$

Nach Definition der Norm bedeutet diese Ungleichung, dass für alle $x \in X$ gilt

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Halten wir nun $\varepsilon$, $n_0$ und $n$ fest, so haben wir eine Zahlenfolge $f_m(x) - f_n(x)$, die für $m \geq n_0$ an im Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Da dieses Intervall abgeschlossen ist, liegt auch der Grenzwert $f(x) - f_n(x)$ in diesem Intervall. Wir haben gezeigt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in X$ gilt

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Dies ist gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $f_n$ gegen $f$. $\square$

# 5 Integration

Intuitiv gesprochen ist das Integral einer nichtnegativen Funktion der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion und der $x$-Achse begrenzt wird. Da sich Rechteckflächen am einfachsten berechnen lassen, betrachten wir zunächst sogenannte Treppenfunktionen.

**Definition 9** *Eine Funktion $u$ auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine natürliche Zahl $k$ und reelle Zahlen $x_0$, ..., $x_k$ gibt, so dass $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k = b$ gilt und die Einschränkung von $u$ auf jedes Teilintervall $(x_{i-1}, x_i)$ konstant ist.*

Die Werte von $u$ an den Stellen $x_i$ sind uns hier gleichgültig. Ist die Funktion $u$ an einem Teilungspunkt $x_i$ stetig, so stimmen die Werte auf den anliegenden Intervallen $(x_{i-1}, x_i)$ und $(x_i, x_{i+1})$ überein, und wir können den Teilungspunkt $x_i$ weglassen. Nach endlich vielen Schritten bleiben nur die Unstetigkeitsstellen zurück. Umgekehrt können wir beliebig Teilungspunkte hinzufügen. Will man z. B. zeigen, dass die Summe von zwei Treppenfunktionen wieder eine Treppenfunktion ist, braucht man nur die Gesamtheit der Teilungspunkte beider Funktionen in aufsteigender Reihenfolge zu ordnen, und auf den entstehenden Teilintervallen sind beide Funktionen konstant.

**Definition 10** *Es sei $u$ eine Treppenfunktion auf $[a, b]$, und es seien $x_1$, $x_2$, ..., $x_{k-1}$ die Unstetigkeitsstellen von $u$ in $(a, b)$, nummeriert in aufsteigender Reihenfolge. Das Integral von $u$ über das Intervall $[a, b]$ ist definiert als*

$$\int_a^b u(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} u_i(x_i - x_{i-1}),$$

*wobei $u_i$ den Wert von $u$ auf dem Intervall $(x_{i-1}, x_i)$ bezeichnet und wir $x_0 = a$, $x_k = b$ gesetzt haben.*

Wenn wir zusätzliche Teilungspunkte einfügen und alle Teilungspunkte wieder in aufsteigender Reihenfolge nummerieren, so bleibt diese Formel gültig. Ist $u$ konstant mit dem Wert $c$, so ist das Integral offensichtlich gleich $c(b-a)$. Wir wollen ein gehaltvolleres Beispiel betrachten.
*Beispiel.* In dem Intervall $[1, a]$, wobei $a > 1$, betrachten wir die Teilungspunkte $x_i = q^i$, wobei $q = \sqrt[k]{a}$. Die Treppenfunktion $u$ habe auf dem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i)$ den Wert $u_i = x_{i-1}^m$, wobei $m$ eine feste natürliche Zahl ist. In diesem Fall werden die Formeln kürzer, wenn wir den Index $i$ durch $j + 1$ ersetzen, so dass

$$\int_1^a u(x)\,dx = \sum_{j=0}^{k-1} u_{j+1}(x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{k-1} q^{jm}(q^{j+1} - q^j) = (q-1)\sum_{j=0}^{k-1} q^{j(m+1)}.$$

Mit der Summenformel für die geometrische Progression erhalten wir

$$\int_1^a u(x)\,dx = (q-1)\frac{q^{k(m+1)}-1}{q^{m+1}-1}.$$

Ersetzen wir $q^k$ durch $a$ und wenden die Summenformel ein zweites Mal an, so erhalten wir

$$\int_1^a u(x)\,dx = \frac{a^{m+1}-1}{1+q+\cdots+q^m}.$$

**Lemma 1** *Sind $u$ und $v$ Treppenfunktionen auf $[a,b]$ und ist $c$ eine reelle Zahl, so gilt*

$$\int_a^b cu(x)\,dx = c\int_a^b u(x)\,dx, \qquad \int_a^b (u(x)+v(x))\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,dx.$$

*Gilt $u(x) \le v(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so ist*

$$\int_a^b u(x)\,dx \le \int_a^b v(x)\,dx.$$

*Beweis.* Die erste Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Definition. Für die zweite vereinigen wir die Menge der Unstetigkeitsstellen von $u$ mit der von $v$ und nummerieren sie wie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. Dann ist sowohl $u$ als auch $v$ auf jedem der Intervalle $(x_{i-1}, x_i)$ konstant, und bezeichnen wir die Werte mit $u_i$ bzw. $v_i$, so gilt

$$\sum_{i=1}^k (u_i+v_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^k u_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^k v_i(x_i - x_{i-1}).$$

Dies ist genau die zweite behauptete Gleichheit, da wir, wie oben bemerkt, zusätzliche Teilungspunkte einfügen können.

Die dritte Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition, weil in diesem Fall $u_i \le v_i$ für alle $i$ gilt. □

**Definition 11** *Eine Funktion $f$ auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ heißt Regelfunktion, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $u$ auf $[a,b]$ gibt, so dass $\|f-u\| < \varepsilon$.*

Insbesondere gibt es dann also für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion $u_n$, so dass $\|f - u_n\| < \frac{1}{n}$, und das bedeutet, dass die Folge der Funktionen $u_n$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Es folgt z. B. aus den Rechenregeln für Grenzwerte, dass die Summe zweier Regelfunktionen wie auch das skalare Vielfache einer Regelfunktion wieder eine Regelfunktion ist.

**Lemma 2** *Konvergiert eine Folge von Treppenfunktionen $u_n$ gleichmäßig gegen Null, so ist*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx = 0.$$

*Beweis.* Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $\|u_n\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, also

$$-\frac{\varepsilon}{b-a} < u(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

für alle $x \in [a, b]$. Nach der Ungleichung im Lemma 1 folgt dann

$$-\varepsilon \leq \int_a^b u(x)\, dx \leq \varepsilon$$

für $n \geq n_0$. □

**Definition 12** *Ist $f$ eine Regelfunktion auf $[a, b]$, so definieren wir das Integral von $f$, indem wir eine Folge von Treppenfunktionen $u_n$ wählen, die gleichmäßig gegen $f$ konvergiert, und setzen*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx.$$

Nach Satz 12 ist $u_n$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Norm, und nach dem Spezialfall des unten folgenden Satzes 14 für Treppenfunktionen (den man schon hier beweisen sollte) gilt

$$\left| \int_a^b u_m(x)\, dx - \int_a^b u_n(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |u_m(x) - u_n(x)|\, dx \leq \|u_m - u_n\|(b - a),$$

also ist die Folge der Integrale $\int_a^b u_n(x)\, dx$ eine Cauchy-Folge im gewöhnlichen Sinne. Somit ist sie nach Satz 4 konvergent.
*Beispiel.* Wir wollen feststellen, wie gut die Funktion $f(x) = x^m$ durch die Treppenfunktion $u$ aus dem obigen Beispiel approximiert wird. Auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i)$ gilt, da $u$ dort konstant und $f$ monoton wachsend ist,

$$0 \leq f(x) - u(x) \leq f(x_i) - u_i = x_i^m - x_{i-1}^m = (q - 1)q^{i-1}.$$

Die größte dieser Zahlen, also die mit $i = k$, ist eine obere Schranke der Differenz, d. h.

$$\|f - u\| \leq \frac{q-1}{q}\, a.$$

Wir können die Zahl $k$ der Teilintervalle beliebig groß wählen, wobei natürlich die Funktion $u$ wie auch die Zahl $q = \sqrt[k]{a}$ von $k$ abhängt, und wegen $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a} = 1$ wird $\|f - u\|$ beliebig klein. Also ist $f$ eine Regelfunktion, und

$$\int_1^a f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \frac{a^{m+1}-1}{1+a^{1/k}+\cdots+a^{m/k}} = \frac{a^{m+1}-1}{m+1}.$$

Die Definition des Integrals einer Regelfunktion $f$ ist korrekt, denn wenn wir eine andere Folge von Treppenfunktionen $v_n$ wählen, die ebenfalls gleichmäßig gegen $f$ konvergiert, so konvergiert $u_n - v_n$ gleichmäßig gegen Null, und nach Lemma 2 ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b v_n(x)\,dx.$$

Ist $f$ selbst eine Treppenfunktion, so ergibt sich kein Widerspruch zur vorherigen Definition, denn wir können $u_n = f$ für alle $n$ wählen.

**Satz 13** *Sind $f$ und $g$ Regelfunktionen auf $[a,b]$ und ist $c$ eine reelle Zahl, so gilt*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

*Gilt $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

*Beweis.* Konvergiert die Folge von Treppenfunktionen $u_n$ gleichmäßig gegen $f$, so gilt nach Lemma 1 für alle $n$

$$\int_a^b cu_n(x)\,dx = c\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Da die Folge $cu_n$ gleichmäßig gegen $cf$ konvergiert, folgt die erste Behauptung mit Hilfe der Produktregel für Grenzwerte. Analog beweist man die zweite Behauptung mit Hilfe der Summenregel.

Zum Beweis der dritten Behauptung können wir uns durch Betrachtung der Differenz auf den Fall beschränken, dass $f = 0$ ist, also $g(x) \ge 0$ für alle $x$. Daraus folgt zwar nicht, dass auch die approximierenden Treppenfunktionen nichtnegativ sein müssen. Ist aber $v$ eine Treppenfunktion, so ist durch $w(x) = \max(v(x), 0)$ eine Treppenfunktion $w$ gegeben, und wegen der Nichtnegativität von $g$ gilt $\|g-w\| \le \|g-v\|$. Wir können $g$ also als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge $w_n$ nichtnegativer Treppenfunktionen schreiben. Deren Integrale sind nach Lemma 1 ebenfalls nichtnegativ, und dasselbe gilt für den Grenzwert. □

Die Ungleichung im Satz kann man benutzen, um das Integral einer Funktion abzuschätzen, die man nur näherungsweise kennt, wobei aber die Näherungsfunktion nur nach oben oder nur nach unten abweicht. Bei Abweichungen in beiden Richtungen ist das folgende Resultat nützlich, in dem $f$ die Rolle der Abweichung spielen kann.

**Satz 14** *Ist $f$ eine Regelfunktion auf $[a, b]$, so ist auch $|f|$ eine Regelfunktion, und*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

*Beweis.* Für eine Treppenfunktion $u$ ist dies eine Folgerung der Dreiecksungleichung, denn in den Bezeichnungen aus der Definition des Integrals solcher Funktionen gilt

$$\left|\sum_{i=1}^{k} u_i(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |u_i|\,(x_i - x_{i-1})$$

(wobei wir benutzt haben, dass $x_i - x_{i-1} \geq 0$), und dies ist gleichbedeutend mit der Behauptung des Satzes für $u$ statt $f$.

Nun zum allgemeinen Fall. Aus Aufgabe 10 wissen wir, dass für jede Treppenfunktion $u$ auf $[a, b]$ gilt

$$\big\||f| - |u|\big\| \leq \|f - u\|.$$

Ist $f$ eine Regelfunktion, dann können wir $u$ so wählen, dass die rechte Seite kleiner als ein vorgegebenes positives $\varepsilon$ ist. Die Treppenfunktion $|u|$ approximiert also die Funktion $|f|$ mindestens mit der selben Genauigkeit, also ist auch $|f|$ eine Regelfunktion. Für alle $x \in [a, b]$ gilt

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

und mit der Ungleichung aus Satz 13 folgt

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$ □

Bisher stimmte der Definitionsbereich der zu integrierenden Funktion immer mit dem Integrationsintervall überein. Wir lassen nun auch den Fall zu, dass eine Regelfunktion auf einer Menge gegeben ist, welche das Intervall $[a, b]$ als Teilmenge enthält, und definieren in diesem Fall $\int_a^b f(x)\,dx$ als das Integral der Einschränkung von $f$ auf $[a, b]$.

**Satz 15** *Ist* $a \leq b \leq c$ *und ist* $[a, c]$ *im Definitionsbereich von* $f$ *enthalten, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

*Beweis.* Es sei $u_n$ eine Folge von Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, c]$, die dort gleichmäßig gegen die Einschränkung von $f$ konvergiert. Das gleiche gilt dann für die Einschränkungen dieser Funktionen auf $[a, b]$ und $[b, c]$. Direkt aus der Definition des Integrals für Treppenfunktionen folgt, dass

$$\int_a^b u_n(x)\,dx + \int_b^c u_n(x)\,dx = \int_a^c u_n(x)\,dx.$$

Durch Grenzübergang folgt die Behauptung. □

Wir wollen das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ohne die Voraussetzung $a \leq b$ definieren, so dass die Identität im Satz gültig bleibt. Setzen wir dort $c = a$, so ergibt sich, dass wir

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

setzen müssen. Man prüft leicht nach, dass mit dieser Festsetzung der Satz für beliebige Anordnungen von $a$, $b$ und $c$ gültig bleibt, wenn die Funktion $f$ zumindest auf einem Intervall definiert ist, welches $a$, $b$ und $c$ enthält.

# 6 Integration stetiger Funktionen

Im Rahmen unserer Definition sind nur Regelfunktionen integrierbar. Als Beispiele von Regelfunktionen kennen wir bisher die Treppenfunktion sowie die Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten. Aus Satz 13 folgt, dass alle Polynome Regelfunktionen sind. Natürlich bezieht sich das immer auf die Einschränkung der jeweiligen Funktion auf ein beschränktes abgeschlossenes Intervall. Da jede Treppenfunktion beschränkt ist, muss auch jede Regelfunktion beschränkt sein.

**Satz 16** *Jede stetige Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall ist eine Regelfunktion.*

*Beweis.* Wir halten ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest und bezeichnen mit $M$ die Menge aller Zahlen $c$ aus $[a, b]$ mit der Eigenschaft, dass es eine Treppenfunktion $u$ auf $[a, c]$ gibt, so dass für alle $x \in [a, c]$ gilt $|f(x) - u(x)| < \varepsilon$. Die Menge $M$ ist nicht leer, weil sie $a$ enthält, und $b$ ist eine obere Schranke von $M$. Es sei $d$ die kleinste obere Schranke von $M$, die nach Satz 8 existiert.

Wegen der Stetigkeit an der Stelle $d$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $|x - d| < \delta$ gilt $|f(x) - f(d)| < \varepsilon$. Weil $d$ die kleinste obere Schranke von $M$ ist, gibt es ein $c > d - \delta$, das zu $M$ gehört, und eine zugehörige Treppenfunktion $u$ auf $[a, c]$ laut Definition von $M$.

Es sei $e \in [a, b]$ derart, dass $d \le e < d + \delta$. Wir definieren eine Funktion $v$ auf $[a, e]$ durch die Festlegung

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & \text{falls } a \le x \le c, \\ f(d), & \text{falls } c < x \le e. \end{cases}$$

Dann ist $v$ eine Treppenfunktion, und es gilt $|f(x) - v(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, e]$. Somit gehört $e$ zu $M$.

Wäre $d < b$, so könnten wir $e > d$ wählen, was der Tatsache widerspricht, dass $d$ eine obere Schranke von $M$ ist. Also gilt $d = b$. Die einzige mögliche Wahl ist also $e = d = b$, und es folgt, dass $b \in M$. Nun erinnern wir uns an die Definition von $M$. Da $\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl war, ist $f$ eine Regelfunktion. □

Für stetige Funktionen gilt eine Verschärfung der letzten Behauptung von Satz 13.

**Satz 17** *Es sei $f$ eine nichtnegative stetige Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, die aber nicht konstant gleich Null sei. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

Man beachte, dass dieser Satz ohne die Voraussetzung der Stetigkeit falsch wäre, wie das Beispiel einer nichtnegativen Funktion zeigt, die nur an einer einzigen Stelle einen positiven Wert annimmt.

*Beweis.* Nach Voraussetzung gibt es ein $c \in [a,b]$, so dass $f(c) > 0$. Wir wählen eine positive Zahl $\varepsilon < f(c)$. Wegen der Stetigkeit von $f$ an der Stelle $c$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in [a,b]$ mit $|x-c| < \delta$ gilt $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Insbesondere gibt es Zahlen $d < e$ in $[a,b]$, so dass für alle $x \in [d,e]$ gilt $f(x) > f(c) - \varepsilon$. Mit Satz 15 folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^e f(x)\,dx + \int_e^b f(x)\,dx$$

und hieraus mit Satz 13

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 + (f(c) - \varepsilon)(e-d) + 0.$$

□

Der Mittelwert von endlich vielen Größen ist das arithmetische Mittel. Was aber ist der Mittelwert einer Funktion $f$ auf einem Intervall $[a,b]$, zum Beispiel das Tagesmittel der Temperatur? Misst man die Werte in regelmäßigen Abständen, so bildet das arithmetische Mittel offensichtlich nur einen Näherungswert. Als Mittelwert der Funktion $f$ bezeichnet man die Zahl

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

**Satz 18 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)** *Es sei $f$ eine stetige Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a,b]$. Dann gibt es ein $c \in (a,b)$, so dass*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Der Mittelwert wird also im Inneren des Intervalls als Funktionswert angenommen.

*Beweis.* Nach Satz 10 hat $f$ einen kleinsten Wert $s$ und einen größten Wert $t$. Mit Satz 13 folgt

$$s(b-a) = \int_a^b s\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b t\,dx = t(b-a).$$

Der Mittelwert liegt also zwischen $s$ und $t$, und nach Satz 9 ist sie von der Form $f(c)$ für ein $c \in [a, b]$.

Um zu zeigen, dass man sogar $c \in (a, b)$ wählen kann, können wir voraussetzen, dass $s < t$, denn sonst wäre $f$ konstant und man könnte jedes $c \in (a, b)$ nehmen. Die Werte $s$ und $t$ werden also in zwei verschiedenen Punkten $a' < b'$ von $[a, b]$ angenommen. Es sei z. B. $f(a') = s$ und $f(b') = t$. Der Zwischenwertsatz liefert sogar $c \in [a', b']$. Wäre $c = a'$, so hätten wir

$$\int_a^b (f(x) - s)dx = (f(c) - s)(b - a) = 0,$$

aber das würde Satz 17 widersprechen, denn $f(x) - s$ ist nichtnegativ und an der Stelle $b'$ positiv. Also ist $c \neq a'$, und analog zeigt man, dass $c \neq b'$. $\square$

# 7 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In der von Newton und Leibniz entwickelten Form war die Infinitesimalrechnung (von lat. *infinitesimalis*, d. h. unendlich klein) noch logisch widersprüchlich. Seit Cauchy kommt man ohne "unendlich kleine" Größen aus, und heute spricht man statt dessen von Differential- und Integralrechnung. Wir werden die Differentialrechnung hier nicht ausführlich behandeln, sondern erinnern nur kurz an die Definitionen.

**Definition 13** *Die Zahl $g$ heißt Grenzwert der Funktion $f$ an der Stelle $a$, wenn es für jede positive Zahl $\varepsilon$ eine positive Zahl $\delta$ gibt, so dass für alle $x$ im Definitionsbereich von $f$ mit den Eigenschaften $x \neq a$ und $|x-a| < \delta$ gilt*

$$|f(x) - g| < \delta.$$

Wie im Fall von Folgen zeigt man, dass es nur einen Grenzwert einer Funktion an einer Stelle $a$ geben kann, und man bezeichnet ihn mit

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Dass $g$ Grenzwert der Funktion $f$ an der Stelle $a$ ist, kann man auch so ausdrücken: Ändert oder ergänzt man die Definition der Funktion $f$ durch die Festlegung $f(a) = g$, so ist die entstehende Funktion an der Stelle $a$ stetig.

**Definition 14** *Die Funktion $f$ sei in einer Umgebung der Stelle $a$ definiert. Sie heißt an der Stelle $a$ differenzierbar, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*existiert, den man dann die Ableitung von $f$ an der Stelle $a$ nennt und mit $f'(a)$ bezeichnet.*

Es genügt auch, wenn $f$ in einer einseitigen Umgebung von $a$ definiert ist. Man spricht dann auch von einseitigen Ableitungen.

Wir untersuchen nun Integrale mit veränderlicher (oberer) Grenze. Wir stellen uns das Integral einer positiven Funktion als Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion vor. Bewegt man die obere Integrationsgrenze ein wenig nach rechts, so kommt der Flächeninhalt eines Streifens hinzu, dessen Oberkante im Allgemeinen nicht geradlinig ist. Um die Änderungsgeschwindigkeit des Integrals zu ermitteln, muss man durch die Breite des Streifens dividieren (so dass man den Mittelwert der Funktion in dem Streifen erhält) und die Streifenbreite gegen Null gehen lassen. Man wird also direkt auf folgendes Ergebnis geführt:

**Satz 19** *Es sei $f$ eine Regelfunktion auf einem Intervall $I$ und $c$ ein beliebiger Punkt von $I$. Wir definieren eine Funktion $F$ auf $I$ durch*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt.$$

*Dann gilt*

$$|F(x) - F(y)| \leq \|f\| \cdot |x-y|\,.$$

*Ist $f$ stetig an einer Stelle $a \in I$, so ist $F$ an dieser Stelle differenzierbar, und es gilt*

$$F'(a) = f(a).$$

*Beweis.* Nach Satz 15 ist

$$F(x) - F(y) = \int_x^y f(t)\,dt, \tag{2}$$

und mit Satz 14 folgt

$$|F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt,$$

falls $x < y$, bzw.

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_y^x |f(t)|\,dt,$$

falls $x > y$. Für alle $t$ zwischen $x$ und $y$ gilt $|f(t)| \leq \|f\|$, und die erste Behauptung folgt aus Satz 13.

Nun sei $f$ an der Stelle $a \in I$ stetig. Wir geben uns ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $t \in I$ mit der Eigenschaft $|t-a| < \delta$ gilt

$$f(a) - \varepsilon < f(t) < f(a) + \varepsilon.$$

Mit Satz 17 folgt für $a < x < a + \delta$, dass

$$(f(a) - \varepsilon)(x-a) < F(x) - F(a) < (f(a) + \varepsilon)(x-a),$$

und für $a - \delta < x < a$ folgt

$$(f(a) - \varepsilon)(a-x) < F(a) - F(x) < (f(a) + \varepsilon)(a-x).$$

Dividieren wir durch $x - a$ bzw. $a - x$, je nachdem, welche Zahl positiv ist, so erhalten in beiden Fällen

$$f(a) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(a)}{x-a} < f(a) + \varepsilon.$$

Wir haben bewiesen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in I$ mit den Eigenschaften $x \neq a$ und $|x - a| < \delta$ gilt

$$\left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a) \right| < \varepsilon.$$

Dies besagt genau, dass

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(x),$$

dass also $F'(a) = f(a)$. □

Für eine gegebene Funktion fragen wir uns, von welcher Funktion sie abgeleitet ist, von welcher Funktion sie also in diesem Sinne abstammt.

**Definition 15** *Auf einem Intervall $I$ sei eine Funktion $f$ gegeben. Eine Funktion $F$ auf $I$ heißt Stammfunktion von $f$, wenn sie differenzierbar ist und ihre Ableitung gleich $f$ ist, also $F' = f$ auf dem Intervall $I$.*

Ist $F$ eine Stammfunktion der Nullfunktion, so ist $F$ konstant. Für beliebige $x < y$ in $I$ gibt es nämlich nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $z \in (x, y)$, so dass $F(y) - F(x) = F'(z)(y - x)$, also $F(x) = F(y)$. Umgekehrt ist natürlich jede konstante Funktion eine Stammfunktion der Nullfunktion.

Sind $F_1$ und $F_2$ zwei Stammfunktionen der selben Funktion $f$, so ist $F_1 - F_2$ eine Stammfunktion der Nullfunktion, also konstant, und umgekehrt. Zwei beliebige Stammfunktionen einer Funktion unterscheiden sich also durch eine Konstante. Kennt man eine Stammfunktion $F$ von $f$, so ist jede andere von der Form $F + C$ für eine Konstante $C$.

Die Metapher der Abstammung ist also nicht besonders glücklich gewählt, da eine stetige Funktion unendlich viele Stammfunktionen besitzt.

**Satz 20 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)** *Ist $f$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$ und $F$ eine Stammfunktion von $f$, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

*Beweis.* Die rechte Seite ändert sich nicht, wenn wir $F$ durch eine andere Stammfunktion ersetzen, denn

$$(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Wir können also annehmen, dass $F$ die in Satz 19 konstruierte Stammfunktion ist, wobei $c \in [a, b]$. In diesem Fall tauchte die Behauptung (mit anderen Bezeichnungen) bereits als Gleichung (2) im Beweis von Satz 19 auf. $\square$

Der Hauptsatz hat vielfältige Anwendungen in der Physik. Kennt man z. B. die Geschwindigkeit $v$ einer geradlinigen Bewegung als Funktion der Zeit, so errechnet sich die vom Zeitpunkt $t_1$ bis zum Zeitpunkt $t_2$ zurückgelegte Strecke als

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Anstelle des Weges $s$ kann man die Änderungsgeschwindigkeit einer beliebigen physikalischen Größe als Funktion der Zeit betrachten. So ist beispielsweise die elektrische Stromstärke $I$ an einem Leiterquerschnitt definiert als zeitliche Ableitung der hindurchgeflossenen elektrischen Ladung (mit der Einheit 1 Ampère = 1 Coulomb/Sekunde), und man erhält die vom Zeitpunkt $t_1$ bis zum Zeitpunkt $t_2$ insgesamt hindurchgeflossene Ladung als

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt.$$

Manche physikalische Größen lassen sich überhaupt nur als Integral definieren. So ist z. B. die von einer veränderlichen Kraft $F$ durch Verschiebung längs eines Weges von $s_1$ bis $s_2$ verrichtete Arbeit definiert als

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds.$$

(Dabei wirke die Kraft in Richtung des geradlinigen Weges.) Nur im Falle konstanter Kraft ergibt sich

$$W = F \cdot (s_2 - s_1).$$

Es soll noch der alte Begriff des unbestimmten Integrals

$$\int f(x)\,dx$$

erwähnt werden. Darunter versteht man eine beliebige Stammfunktion von $f$. Kennt man eine Stammfunktion $F$, so schreibt man

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

wobei $C$ eine beliebige Konstante ist. Diese Mehrdeutigkeit entspricht aber nicht mehr heutigen Vorstellungen von logischer Strenge.

# 8 Elementare Integrale

Um die Stammfunktion einer gegebenen Funktion zu finden, sieht man naturgemäß nach, ob sie unter den bereits bekannten Ableitungen vorkommt. Zunächst betrachtet man die Ableitungen der elementaren Funktionen. Die Nützlichsten scheinen zunächst die Folgenden zu sein:

$$\begin{aligned}(x^n)' &= nx^{n-1},\\ (e^x)' &= e^x,\\ (\ln x)' &= \frac{1}{x},\\ (\sin x)' &= \cos x,\\ (\cos x)' &= -\sin x.\end{aligned}$$

So ist z. B. die Exponentialfunktion eine Stammfunktion von sich selbst, und die Sinusfunktion ist eine Stammfunktion der Cosinusfunktion. Um nicht für jede hier vorkommende Funktion eine Variable als Funktionsnamen vergeben zu müssen, verwenden wir Rechenausdrücke synonym zu den durch sie gegebenen Funktionen.[1] Wir erinnern daran, dass der natürliche Logarithmus nur für $x > 0$ definiert ist. Gleiches gilt für die Potenz, falls der Exponent $n$ nicht ganzzahlig ist.

Des Weiteren ist klar, dass man aus einer Stammfunktion $F$ von $f$ eine Stammfunktion für ein Vielfaches $cf$ von $f$ gewinnen kann, nämlich $cF$, denn $(cF)' = cF' = cf$. So ist z. B. $-\cos$ eine Stammfunktion von sin, und $\frac{x^n}{n}$ ist eine Stammfunktion von $x^{n-1}$, falls $n \neq 0$. Bezeichnen wir $n-1$ mit $m$, so finden wir, dass $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ eine Stammfunktion von $x^m$ ist. Wir erhalten also

$$\int_1^a x^m dx = \frac{a^{m+1}}{m+1} - \frac{1^{m+1}}{m+1} = \frac{a^{m+1}-1}{m+1},$$

was wir schon früher (etwas mühsam) gefunden haben. Unter diesen Funktionen fehlt $x^{-1}$, aber auch für sie kann eine Stammfunktion in der obigen Liste abgelesen werden, nämlich ln.

Man könnte fragen, ob auch der Logarithmus zu einer beliebigen Basis $a > 0$, $a \neq 1$, hier von Nutzen ist. Nach Definition ist

$$y = \log_a x$$

gleichbedeutend mit

$$a^y = x.$$

[1] Sogar bei Funktionen, die in Formeln durch Abkürzungen wiedergegeben werden, haben sich altmodische Schreibweisen wie $(\sin x)'$ statt $\sin' x$ und $\sin^2 x$ statt $(\sin x)^2$ erhalten.

Ist nun $z = \ln a = \log_e a$, so folgt

$$e^{zy} = (e^z)^y = x,$$

also $\ln x = zy$, d. h.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Dies ist ein Vielfaches der Funktion ln und liefert keine wesentlich neue Stammfunktion.

Aus der Summenregel der Differentiation folgt, dass man aus einer Stamfunktion $F$ von $f$ und einer Stammfunktion $G$ von $g$ die Stammfunktion $F + G$ für die Funktion $f + g$ finden kann. Damit kennt man insbesondere Stammfunktionen für sämtliche Polynome, z. B.

$$\int_1^2 (10x^4 - 2x^3 + x + 5)\,dx = \left(\frac{2^5}{2} + \frac{2^4}{2} - \frac{2^2}{2} + 5 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{2} + \frac{1^4}{2} - \frac{1^2}{2} + 5 \cdot 1\right).$$

Damit man umfangreiche Rechenausdrücke nicht zweimal schreiben muss, hat man die Abkürzungen

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \big[F(x)\big]_a^b$$

eingeführt, so dass man das obige Zwischenergebnis als

$$\left[\frac{x^5}{2} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 5x\right]_1^2$$

schreiben kann.

Aus der Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg',$$

der Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

und der Kettenregel

$$(g \circ f)'(x) = (g'(f(x))f'(x)$$

lassen sich keine Regeln für das Auffinden einer Stammfunktion für $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ und $f \circ g$ ableiten, weil die rechte Seite nicht von der gleichen Struktur ist. Darum gibt es keinen Algorithmus zur Bestimmung einer Stammfunktion für eine beliebige elementare Funktion. Man kann sogar beweisen, dass manche elementaren Funktionen keine elementare Stammfunktion besitzen, wie z. B. die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtige Funktion $e^{-x^2}$. So muss man für jede weitere bekannte Ableitung dankbar sein, wie z. B.

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},\\ (\cot x)' &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Nach Definition muss eine Stammfunktion auf einem Intervall definiert sein. Wir haben z. B. eine Stammfunktion von $\frac{1}{\cos^2 x}$ nur auf solchen Intervallen, die keine Nullstelle der Cosinusfunktion enthalten, und die Rechnung

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x\Big|_0^\pi = 0 - 0$$

ist falsch.

Auch die Umkehrfunktionen von manchen elementaren Funktionen zählen zu den elementaren Funktionen, z. B. die der Winkelfunktionen. Aus der Kettenregel folgt für die Umkehrfunktion $g$ einer Funktion $f$, dass

$$1 = g'(f(x))f'(x),$$

und ist $y = f(x)$, also $x = g(y)$, so folgt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Die Einschränkung der Sinusfunktion auf $[-\pi, \pi]$ ist monoton wachsend und hat die Umkehrfunktion *arcus sinus*. Wir erhalten also für $y = \sin x$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x}.$$

Wegen der Voraussetzung $x \in [-\pi, \pi]$ ist $\cos x \geq 0$, also $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, und es folgt

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Analog definiert man die Funktion *arcus cosinus* als Umkehrfunktion der Cosinusfunktion auf dem Intervall $[0, \pi]$ und findet

$$(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Etwas detaillierter gehen wir auf die Umkehrfunktion *arcus tangentis* der Tangensfunktion auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ein. Ist $x$ in diesem Intervall und $y = \tan x$, so ist $x = \arctan y$ und

$$(\arctan y)' = \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x},$$

also

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Analog definiert man *arcus cotangentis* als Umkehrfunktion der Cotangensfunktion auf $[0, \pi]$ und findet

$$(\operatorname{arccot} y)' = -\frac{1}{1 + y^2}.$$

Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen, auch zyklometrische Funktionen genannt, bereichern also das Repertoire um die Stammfunktion $\arcsin x$ von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und die Stammfunktion $\arctan x$ von $\frac{1}{1+x^2}$.

Man kann noch die Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrungen betrachten, die sich zwar durch Exponential- und Logarithmusfunktion ausdrücken lassen, also insofern nichts prinzipiell Neues liefern, aber manche Formeln übersichtlicher werden lassen. Man definiert den *sinus hyperbolicus* und den *cosinus hyperbolicus* durch

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Während alle Punkte mit Koordinaten $(\cos x, \sin x)$ auf dem Einheitskreis liegen, zeigt die leicht nachzurechnende Formel

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

dass alle Punkte mit Koordinaten $(\cosh x, \sinh x)$ auf einer Hyperbel mit dem Scheitelpunkt $(1, 0)$ liegen, was den Namen dieser Funktionen erklärt. Auch die Ableitungen

$$(\sinh x)' = \cosh x, \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

erinnern stark an die entsprechenden Formeln für die Winkelfunktionen und liefern uns die Stammfunktionen von sinh und cosh.

Man betrachtet auch die Funktionen *tangens hyperbolicus* und *cotangens hyperbolicus*, gegeben durch

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Ihre Ableitungen

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \qquad (\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x},$$

liefern uns zwei weitere Stammfunktionen, die man nicht ohne Weiteres erraten hätte.

Der hyperbolische Sinus ist streng monoton und nimme jeden reellen Wert an. Seine Umkehrfunktion heißt *area sinus hyperbolici*. (Auf den Namen werden wir später eingehen.) Ist $y = \sinh x$, also $2y = e^x - e^{-x}$, so erhalten wir nach Multiplikation beider Seiten mit $e^x$ die Gleichung

$$2ye^x = (e^x)^2 - 1.$$

Schreiben wir $e^x = z$, so ist

$$z^2 - 2yz - 1 = 0,$$

und nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen folgt

$$z = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Da $e^x$ positiv ist, kommt nur das Vorzeichen $+$ in Frage, und wir können nach $x = \operatorname{arsinh}$ auflösen:

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}, \qquad \operatorname{arsinh} y = \ln\bigl(y + \sqrt{y^2 + 1}\,\bigr).$$

Zur Berechnung der Ableitung sollte man am besten analog zum *arcus cosinus* vorgehen:

$$(\operatorname{arsinh} y)' = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}},$$

also

$$(\operatorname{arsinh} y)' = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Der hyperbolische Cosinus ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend und hat den Wertebereich $[1, \infty)$. Die Umkehrfunktion *area cosinus hyperbolici* ist also auf dem Intervall $[1, \infty)$ definiert, und wie oben findet man

$$\operatorname{arcosh} y = \ln\bigl(y - \sqrt{y^2 - 1}\,\bigr).$$

Die Funktion arcosh ist nur für $y > 1$ differenzierbar, und die analoge Rechnung liefert

$$(\operatorname{arcosh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

Die Funktionen tanh und coth sind eineindeutig. Die erstere hat den Wertebereich $(-1,1)$, die letztere $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Diese Mengen sind dann die Definitionsbereiche ihrer Umkehrfunktionen *area tangentis hyperbolici* und *area cotangentis hyperbolici*. Beide kann man wieder durch bekannte Funktionen ausdrücken. Ist z. B. $y=\tanh x$, also

$$(e^x+e^{-x})y=e^x-e^{-x},$$

so erhält man durch Multiplikation mit $e^x$

$$(e^{2x}+1)y=e^{2x}-1, \qquad 1+y=e^{2x}(1-y)$$

und schließlich

$$e^{2x}=\frac{1+y}{1-y},$$

so dass

$$\operatorname{artanh} y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.$$

Die Ableitungen berechnen wir wie bei arctan nach der allgemeinen Formel für Umkehrfunktionen:

$$(\operatorname{artanh} y)'=\cosh^2 x=\frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x-\sinh^2 x}=\frac{1}{1-\tanh^2 x},$$

also

$$(\operatorname{artanh} y)'=\frac{1}{1-y^2}.$$

Analog findet man

$$\operatorname{arcoth} y=\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1}$$

und die Ableitung

$$(\operatorname{arcoth} y)'=\frac{1}{1-y^2}.$$

Auf den ersten Blick hat es den Anschein, dass die Funktion $\frac{1}{1-y^2}$ zwei wesentlich verschiedene Stammfunktionen artanh und arcoth besitzt. Nach unserer Herleitung ist aber artanh nur eine Stammfunktion auf dem Intervall $(-1,1)$, während arcoth eine Stammfunktion auf jedem der beiden Intervalle $(-\infty,-1)$ und $(1,\infty)$ ist.

# 9 Partielle Integration

Wie bereits bemerkt, folgt aus der Produktregel der Differentiation leider keine einfache Regel zur Bestimmung einer Stammfunktion eines Produktes von zwei Funktionen. Trotzdem ist sie oft von Nutzen.

Durch Umstellen folgt aus der Produktregel für stetig differenzierbare Funktionen $f$ und $g$ auf einem Intervall $[a, b]$, dass

$$f'g = (fg)' - fg'.$$

Integrieren wir beide Seiten über das Intervall, so folgt mit dem Hauptsatz

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Es gibt auch eine Version, in der einfach die Stammfunktionen verglichen werden:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Bei der Anwendung dieser Regel, die man partielle Integration nennt, wird das Problem natürlich nur verlagert. Die Kunst besteht in der geschickten Wahl der Faktoren $f'$ und $g$, damit das Integral auf der rechten Seite einfacher zu bestimmen ist als das auf der linken Seite. Man muss also den Integranden so in zwei Faktoren zerlegen, dass man von einem Faktor bereits eine Stammfunktion kennt. Der andere Faktor sollte im Allgemeinen eine einfache Ableitung haben.

*Beispiel.* Wir wollen eine Stammfunktion für die Funktion $xe^x$ finden. Es liegt nahe, $f(x) = e^x$ und $g(x) = x$ zu setzen, denn dann ist $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 1$, und wir erhalten

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx.$$

Da wir bereits eine Stammfunktion von $e^x$ kennen, ist

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

die gesuchte Stammfunktion, was man durch Ableiten nachprüfen sollte.

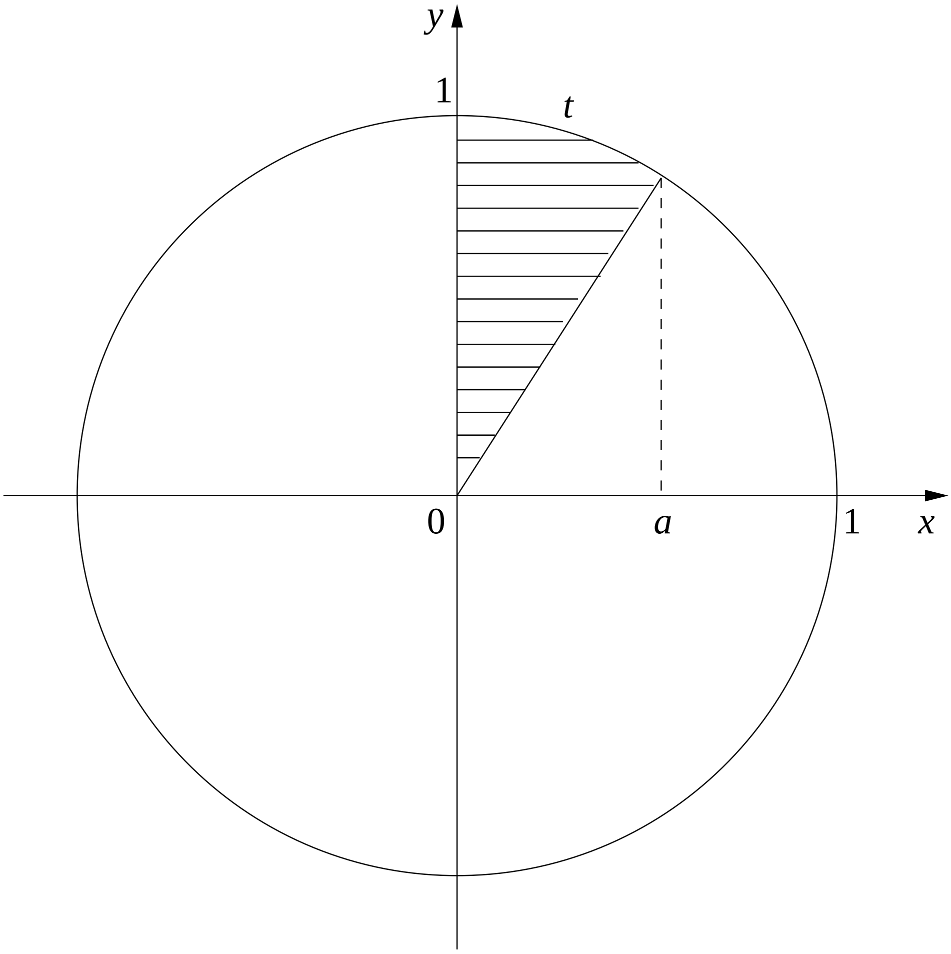
*Beispiel.* Manchmal ist die Wahl der Faktoren nicht offensichtlich, z. B. wenn wir eine Stammfunktion von $\ln x$ suchen. Hier hilft der Trick weiter, $f'(x) = 1$ und $g(x) = \ln x$ zu setzen. Wählen wir $f(x) = x$, so erhalten wir

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C.$$

*Beispiel.* Wir wollen den Inhalt des Kreissektors bestimmen, der vom Kreisbogen zwischen den Abszissen 0 und $a \leq 1$ begrenzt wird. Dazu müssen wir von dem Integral

$$\int_0^a \sqrt{1-x^2}\, dx$$

den Flächeninhalt eines Dreiecks abziehen.




Zunächst suchen wir eine Stammfunktion:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Die erste Stammfunktion auf der rechten Seite ist (bis auf eine Konstante) gleich arcsin, bei der zweiten benutzen wir partielle Integration mit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, also

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

und natürlich $g(x) = x$. Wir erhalten

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Es scheint, dass wir uns im Kreis gedreht haben, denn das unbestimmte Integral auf der rechten Seite ist das selbe wir auf der linken Seite. Bringen wir beide nach links und teilen durch 2, so folgt

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C.$$

Hier muss man sich erinnern, dass unbestimmte Integrale nur bis auf eine Konstante bestimmt sind, der selbe Ausdruck also nicht immer das selbe bedeuten muss. Setzen wir nun $a = \sin t$, wobei $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, so folgt

$$\int_0^{\sin t} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t).$$

Man beachte, dass $\frac{1}{2}\sin t \cos t$ genau der Flächeninhalt des abzuziehenden Dreiecks ist. Der Flächeninhalt des Kreissektors ist also $\frac{t}{2}$.
*Beispiel.* Wir wollen das Integral

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^m dx$$

für alle natürlichen Zahlen $m$ bestimmen. Da wir bereits wissen, dass

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 1,$$

setzen wir $m > 1$ voraus. Wählen wir $g'(x) = \sin x$, also z. B. $g(x) = -\cos x$, so erhalten wir durch partielle Integration

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^m dx = -\,(\sin x)^{m-1}\cos x\Big|_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{m-2}(\cos x)^2 dx.$$

Wegen $m > 1$ verschwinden die Terme vor dem Integral. Bis jetzt ist noch keine Vereinfachung erkennbar, aber ersetzen wir $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$, so folgt

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^m dx = (m-1)\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{m-2} dx - (m-1)\int_0^{\pi/2} (\sin x)^m dx.$$

Hier ist abgesehen vom Faktor $m-1$ rechts der selbe Term wie links entstanden. Vereinigen wir beide, so folgt

$$m\int_0^{\pi/2}(\sin x)^m dx = (m-1)\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{m-2}dx.$$

Teilen wir beide Seiten durch $m$, so haben wir eine Formel, die das gesuchte Integral durch ein einfacheres Integral ausdrückt. Durch wiederholte Anwendung der selben Formel enden wir bei dem Integral mit $m=0$ oder $m=1$. Die Antwort hängt also davon ab, ob $m$ gerade ist oder nicht:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{2n}dx &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\\ \int_0^{\pi/2}(\sin x)^{2n+1}dx &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass für $n\to\infty$ die linken Seiten gegen Null konvergieren. Wallis machte 1656 die Beobachtung, dass der Quotient beider Integrale gegen 1 konvergiert. Es ist nämlich $0\le\sin x\le 1$ für $x$ im Integrationsintervall, also $(\sin x)^{m+1}\le(\sin x)^m$ und somit

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{m+1}dx &\le \int_0^{\pi/2}(\sin x)^m dx,\\ \int_0^{\pi/2}(\sin x)^m dx \le \int_0^{\pi/2}(\sin x)^{m-1}dx &= \frac{m+1}{m}\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{m+1}dx.\end{aligned}$$

Bilden wir die Quotienten, so folgt in der Tat

$$1\le\frac{\int_0^{\pi/2}(\sin x)^m dx}{\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{m+1}dx}\le 1+\frac{1}{m},$$

und die Behauptung ist wegen $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)=1$ offensichtlich. Setzen wir die Formeln für die Integrale ein und isolieren den Faktor $\frac{\pi}{2}$, so erhalten wir die Wallissche Formel

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}.$$

# 10 Integration durch Substitution

Auch die Kettenregel der Differentiation liefert keine Formel für die Stammfunktion einer Verkettung, wenn man Stammfunktionen der verketteten Funktionen kennt. Dennoch ist sie oft von Nutzen.

Angenommen, $F$ und $g$ sind stetig differenzierbare Funktionen, so dass $F \circ g$ auf einem Intervall definiert ist. Dann gilt nach der Kettenregel

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x).$$

Es folgt, dass $F \circ g$ eine Stammfunktion von $(f \circ g) \cdot g'$ ist, wenn $F$ eine Stammfunktion von $f$ ist, d. h. wenn $F' = f$. Wir können das als unbestimmtes Integral

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

schreiben und zur Berechnung bestimmter Integrale anwenden:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

(In der letzten Zeile haben wir zwei Mal den Satz 20 benutzt. Wir bezeichnen im Folgenden immer das Argument von $g$ mit $x$ und das von $f$ mit $u$.)

Zur Anwendung dieser Methode muss man also den Integranden so in zwei Faktoren zerlegen, dass der eine eine Verkettung darstellt, bei der man eine Stammfunktion der äußeren Funktion $f$ kennt, während der andere Faktor genau die Ableitung der inneren Funktion sein muss. Am einfachsten ist dies, wenn $g$ eine lineare Funktion ist, denn dann ist $g'$ eine Konstante.

*Beispiel.* Wir suchen eine Stammfunktion für $\sqrt{7x-5}$ auf dem Intervall $[\frac{5}{7}, \infty)$. Natürlich setzen wir $f(u) = \sqrt{u}$ und $g(x) = 7x - 5$. Dann haben wir die Stammfunktion

$$F(u) = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}$$

von $f$ und die Ableitung $g'(x) = 7$ von $g$. Unsere Formel liefert die Stammfunktion

$$\int \sqrt{7x-5} \cdot 7\, dx = \frac{2(7x-5)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

für das Siebenfache der fraglichen Funktion, aber wir können ja beide Seiten durch den Faktor 7 dividieren. So erhalten wir z. B.

$$\int_{5/7}^{1} \sqrt{7x-5}\, dx = \left.\frac{2(7x-5)^{\frac{3}{2}}}{21}\right|_{5/7}^{1} = \frac{4\sqrt{2}}{21}.$$

*Beispiel.* Wir wollen eine Stammfunktion für $\frac{1}{x}$ auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ finden. Setzen wir $g(x) = -x$ und $f(u) = \frac{1}{u}$ für $u > 0$, so hat $f$ die Stammfunktion $\ln u$ und $g$ die Ableitung $-1$, also

$$\int \frac{1}{-x}\,(-1)\,dx = \ln(-x) + C \qquad \text{für } x < 0.$$

Dies vereinfacht sich zu der gesuchten Formel

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C \qquad \text{für } x < 0.$$

Gelegentlich wird dies mit der Formel für $x > 0$ wie folgt zusammengefasst:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Man muss aber beachten, dass man die letzte Formel nur auf einem Intervall anwenden kann, das nicht die Null enthält.
*Beispiel.* Wir wollen das Integral

$$\int_1^2 xe^{-x^2}\,dx$$

berechnen. Es bietet sich an, $f(u) = e^u$ und $g(x) = -x^2$ zu setzen, dann ist $g'(x) = -2x$, und man kann $F(u) = e^u$ nehmen. Auch wenn hier ein Faktor $-2$ übrigbleibt, braucht man die Rechnung mit dem ursprünglichen Integral nicht zu unterbrechen:

$$\int_1^2 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^2 e^{-x^2}(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\Big|_1^2 = \frac{e^{-1} - e^{-4}}{2}.$$

Diese Integrationsmethode wird besonders übersichtlich, wenn man die Leibnitzsche Schreibweise von Ableitungen als Differentialquotienten benutzt. Schreiben wir also

$$g'(x) = \frac{du}{dx},$$

und stellt man dies nach der "unendlich kleinen Größe" $dx$ um, so ergibt sich formal

$$du = g'(x)\,dx.$$

Man hat also in dem ursprünglichen Integral

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

für den Ausdruck $g(x)$ die Variable $u$ eingesetzt (substituiert) und den Ausdruck $g'(x)\,dx$ durch $du$ ersetzt.

In unserem Beispiel sieht das so aus:

$$u = -x^2, \qquad \frac{du}{dx} = -2x, \qquad -\frac{1}{2}\,du = x\,dx,$$

und die Substitution ergibt

$$\int_1^2 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{-4} e^u du.$$

Man darf nicht vergessen, dass sich die Integrationsgrenzen auf die jeweilige Integrationsvariable beziehen: Zu $x = 2$ gehört $u = -4$ usw.

*Beispiel.* Manchmal braucht man etwas Phantasie, um eine geeignete Substitution zu finden. Um eine Stammfunktion für die Funktion $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ zu finden, setzt man $u = \cos x$. Dann ist

$$\frac{du}{dx} = -\sin x, \qquad du = -\sin x\,dx$$

und

$$\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

auf jedem Intervall, auf dem die Tangensfunktion definiert ist, welches also keine Zahl der Form $\frac{\pi}{2} + k\pi$ für eine ganze Zahl $k$ enthält.

*Beispiel.* Wir suchen die Stammfunktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}}.$$

Dazu wenden wir auf den Radikanden zunächt die Methode der quadratischen Ergänzung an:

$$2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 5 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

Hieraus ersehen wir, dass die gegebene Funktion für alle reellen Zahlen definiert ist. Setzen wir dies ein, so erhalten wir zwar kein elementares Integral, aber es erinnert an das Integral

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}.$$

Wir kommen ihm näher, wenn wir den Bruch mit $\sqrt{2}$ erweitern:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{(2x-3)^2 + 1}}.$$

Nehmen wir nun die Substitution $u = 2x - 3$ vor, wobei $du = 2\,dx$, so erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsinh} u + C.$$

Setzen wir nun für die neue Variable den ursprünglichen Ausdruck ein, so erhalten wir die gesuchte Stammfunktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsinh}(2x - 3) + C.$$

Unter Benutzung der Formel

$$\operatorname{arsinh} u = \ln\bigl(u + \sqrt{u^2 + 1}\,\bigr)$$

können wir auch schreiben

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\bigl(2x - 3 + \sqrt{2(2x^2 - 6x + 5)}\,\bigr) + C.$$

# 11 Parameterabhängige Integrale

In Anwendungen ist man oft daran interessiert, wie sich der Wert eines Integrals ändert, wenn man die Funktion unter dem Integral (den Integranden) „allmählich" ändert. Mathematisch kann man das so interpretieren, dass der Integrand nicht nur von der Integrationsvariablen abhängt, sondern noch von einer weiteren Variablen, die man Parameter nennt. Betrachten wir zunächst den Fall, dass der Parameter eine natürliche Zahl ist.

**Satz 21** *Konvergiert die Folge von Regelfunktionen $f_n$ auf dem Intervall $[a, b]$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f$, so ist $f$ eine Regelfunktion, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

*Beweis.* Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz ein $n$, so dass $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$, und nach Definition von Regelfunktionen gibt es eine Treppenfunktion $u$, so dass $\|f_n - u\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mit der Dreiecksungleichung für die Norm folgt $\|f - u\| < \varepsilon$, und da $\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl war, ist $f$ eine Regelfunktion.

Nach Satz 14 gilt

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \|f_n - f\|(b - a).$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so finden wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz ein $n_0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, und dann ist obige Differenz von Integralen dem Betrage nach kleiner als $\varepsilon$. Also konvergiert die Folge der Integrale $\int_a^b f_n(x)\,dx$ gegen das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Den Spezialfall von Folgen von Treppenfunktionen hatten wir schon im Zusammenhang mit der Definition des Integrals von Regelfunktionen untersucht, vgl. Lemma 2 und Aufgabe 14.

Nun betrachten wir den Fall, dass der Integrand $f$ zusätzlich von einer Variablen $t$ abhängt, die ein Intervall $I$ durchläuft. Jedem Paar $(x, t)$, wobei $x \in [a, b]$ und $t \in I$, ist also ein Funktionswert $f(x, t)$ zugeordnet. Die Menge solcher Paare bezeichnet man als Cartesisches Produkt $[a, b] \times I$ (nach der latinisierten Form des Namens Descartes), und $f$ ist also eine Abbildung von der der Menge $[a, b] \times I$ in die Menge $\mathbb{R}$.

Man kann die Stetigkeit einer Funktion von zwei Variablen definieren und zeigen, dass aus der Stetigkeit von $f$ die stetige Abhängigkeit des Integrals vom Parameter $t$ folgt. Wir wollen nur eine einfache Version beweisen, die folgenden Begriff benutzt.

**Definition 16** *Eine Funktion $g$ auf einer Menge $I$ von reellen Zahlen heißt Lipschitz-stetig, wenn es eine positive Zahl $C$ gibt, so dass für alle $s,\ t \in I$ gilt*

$$|g(s) - g(t)| \le C|s - t|.$$

Man nennt $C$ auch die Lipschitz-Konstante von $g$. Man prüft leicht nach, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist, aber nicht umgekehrt. Es ist z. B. die Funktion $g(t) = \frac{1}{t}$ auf jedem Intervall der Form $[a, \infty)$, wobei $a$ eine positive Zahl ist, Lipschitz-stetig, aber nicht auf dem Intervall $(0, \infty)$, obwohl sie dort stetig ist. Aus der Bemerkung am Ende von Abschnitt 2 folgt, dass eine auf einem Intervall $I$ differenzierbare Funktion $g$ mit der Eigenschaft $|g'(t)| \le C$ für alle $t \in I$ Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante $C$ ist.

**Definition 17** *Eine Abbildung $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments, wenn es eine positive Zahl $C$ gibt, so dass für alle $x \in [a, b]$ und alle $s,\ t \in I$ gilt*

$$|f(x, s) - f(x, t)| \le C|s - t|.$$

Man beachte, dass hier ein und derselbe Wert von $C$ für alle $x$ verwendbar sein muss. Obwohl man jede Variable in eine Funktion einsetzen darf, ist es übersichtlicher, wenn man für ein Argument immer die selbe Variable verwendet und zur Erinnerung von der Funktion $f(x, t)$ spricht, obwohl dies strenggenommen den Wert von $f$ an der Stelle $(x, t)$ bezeichnet.

**Satz 22** *Ist die Funktion $f(x, t)$ auf $[a, b] \times I$ für jedes feste $t \in I$ eine Regelfunktion von $x$, so dass also die Funktion*

$$g(t) = \int_a^b f(x, t)\, dx$$

*existiert, und ist $f$ Lipschitz-stetig bezüglich $t$, so ist $g$ Lipschitz-stetig.*

*Beweis.* für $s,\ t \in I$ gilt nach Satz 14

$$|g(s) - g(t)| \le \int_a^b |f(x, s) - f(x, t)|\, dx.$$

Ist $C$ die Lipschitz-Konstante von $f$ bezüglich $t$, so folgt

$$|g(s) - g(t)| \le \int_a^b C|s - t|\, dx = C(b - a)|s - t|.$$

Hieraus folgt die Behauptung mit der Lipschitz-Konstanten $C(b - a)$ für $g$. □

Nun betrachten wir den Fall, dass der Integrand $f(x,t)$ für jedes feste $x$ eine differenzierbare Funktion von $t$ ist. Halten wir also $x$ fest, so ist $h(t) = f(x,t)$ eine differenzierbare Funktion, und nach Leibniz schreibt man für die Ableitung $\frac{dh}{dt}$ dann $\frac{\partial f}{\partial t}$ (ebenfalls gelesen „d f nach d t") und bezeichnet dies als partielle Ableitung (im Unterschied zu der später einzuführenden totalen Ableitung). Obwohl zu Leibniz' Zeiten unüblich, gibt man heute zur Vermeidung von Missverständnissen meist die Argumente an, also

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{dh}{dt}(t), \quad \text{falls} \quad h(t) = f(x,t).$$

Natürlich kann man auch $\frac{\partial f}{\partial x}$ betrachten. So ist zum Beispiel

$$\frac{\partial(x^t + t\sin x)}{\partial x} = tx^{t-1} + t\cos x, \qquad \frac{\partial(x^t + t\sin x)}{\partial t} = x^t \ln x + \sin x.$$

**Satz 23** *Die Funktion $f(x,t)$ auf $[a,b] \times I$ sei für jedes feste $t \in I$ eine Regelfunktion von $x$, so dass die Funktion*

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

*existiert. Außerdem existiere $\frac{\partial f}{\partial t}$ und sei für jedes feste $t \in I$ eine Regelfunktion von $x$ sowie Lipschitz-stetig bezüglich $t$. Dann ist $g$ differenzierbar, und*

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

*Beweis.* Für $s \neq t$ in $I$ gilt nach Satz 13

$$\frac{g(s) - g(t)}{s - t} = \int_a^b \frac{f(x,s) - f(x,t)}{s - t}\,dx.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes $x$, $s$ und $t$ ein $u$ zwischen $s$ und $t$, so dass

$$\frac{f(x,s) - f(x,t)}{s - t} = \frac{\partial f}{\partial t}(x,u).$$

Ist $C$ die Lipschitz-Konstante von $\frac{\partial f}{\partial t}$ bezüglich der zweiten Variablen, so folgt

$$\left|\frac{f(x,s) - f(x,t)}{s - t} - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq C|u - t| \leq C|s - t|.$$

Mit Hilfe von Satz 14 erhalten wir

$$\left|\frac{g(s)-g(t)}{s-t}-\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\right| \leq \int_a^b C|s-t|\,dx \leq C(b-a)|s-t|.$$

Nach der Definition des Grenzwertes folgt, dass

$$\lim_{s\to t}\frac{g(s)-g(t)}{s-t}=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx. \qquad \square$$

# 12 Kurven

Zunächst betrachten wir ebene Kurven. Die Ebene sei mit einem Koordinatensystem versehen. Die Koordinaten $a_1$ und $a_2$ eines Punktes $a$ fassen wir zu einem geordneten Paar $(a_1, a_2)$ zusammenfassen. Auf diese Weise können wir die Ebene mit der Menge solcher Paare, also dem Cartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, identifizieren, und wir schreiben $a = (a_1, a_2)$.

Elemente von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet man auch als Vektoren. Der Unterschied zu Punkten ist, dass man Vektoren zueinander addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren kann:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \qquad c(x_1, x_2) = (cx_1, cx_2)$$

Außerdem kann man Vektoren zu Punkten addieren, so dass ein Vektor eine Verschiebung der Ebene bewirkt. Die Länge eines Vektors $x = (x_1, x_2)$ definieren wir als

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Dies bedeutet, dass unser Koordinatensystem rechtwinklig ist. Offensichtlich gilt

$$|x_1| \leq |x|, \qquad |x_2| \leq |x|, \qquad |x| \leq |x_1| + |x_2|.$$

Man kann beweisen, dass für beliebige Vektoren $x$, $y \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(Dreiecksungleichung). Sind $a$ und $b$ Punkte, dann gibt es genau einen Vektor $x$, so dass $a + x = b$, also $a_1 + x_1 = b_1$ und $a_2 + x_2 = b_2$. In diesem Fall bezeichnen wir die Länge von $x$ als Abstand der Punkte, dieser ist also

$$|a - b| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Für drei Punkte $a$, $b$ und $c$ folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|,$$

was ihren Namen erklärt.

Eine Kurve entsteht, wenn sich ein Punkt über die Ebene bewegt. Bezeichnen wir seine Koordinaten zum Zeitpunkt $t$ mit $f_1(t)$ und $f_2(t)$, so erhalten wir das geordnete Paar $(f_1(t), f_2(t))$, welches wir mit $f(t)$ bezeichnen. Dann ist $f$ eine Abbildung von einem Zeitintervall $[t_1, t_2]$ in die Menge $\mathbb{R}^2$. Üblicherweise setzt man voraus, dass eine Kurve stetig ist.

**Definition 18** *Die Abbildung $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$ heißt stetig an der Stelle $u \in [t_1, t_2]$, wenn es für jede positive Zahl $\varepsilon$ eine positive Zahl $\delta$ gibt, so dass für alle $s \in [t_1, t_2]$ mit der Eigenschaft $|t - u| < \delta$ gilt $|f(t) - f(u)| < \varepsilon$.*

Der einzige Unterschied von der Definition der Stetigkeit von Funktionen $[t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ besteht darin, dass $|f(t) - f(u)|$ jetzt den Abstand zweier Punkte der Ebene bezeichnet. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass eine Abbildung mit Werten in $\mathbb{R}^2$ genau dann stetig ist, wenn ihre Koordinatenfunktionen $f_1$ und $f_2$ stetig sind. Ganz analog definiert man den Grenzwert einer Abbildung mit Werten in $\mathbb{R}^2$ als Element von $\mathbb{R}^2$. Offensichtlich gilt

$$\lim_{t\to u} f(t) = \Big(\lim_{t\to u} f_1(t), \lim_{t\to u} f_2(t)\Big).$$

**Definition 19** *Eine Abbildung $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$ heißt differenzierbar an der Stelle $u \in [t_1, t_2]$, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{t\to u} \frac{f(t) - f(u)}{t - u}$$

*existiert, und dann nennt man diesen die Ableitung von $f$ an der Stelle $u$, in Formeln $f'(u)$.*

Man beachte, dass $f(t) - f(u)$ ein Vektor ist, so dass die Multiplikation mit der Zahl $\frac{1}{t-u}$ sinnvoll ist, und dass $f'(u)$ wieder ein Vektor ist, den man als Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt $u$ interpretieren kann. Außerdem sieht man leicht, dass $f$ an einer Stelle genau dann differenzierbar ist, wenn beide Koordinatenfunktionen an dieser Stelle differenzierbar sind, und dann gilt

$$f'(u) = \big(f_1'(u), f_2'(u)\big).$$

*Beispiel.* Die Abbildung

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

beschreibt eine Bewegung auf dem Einheitskreis, denn der Abstand vom Koordinatenursprung ist immer

$$\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1.$$

Die Ableitung zum Zeitpunkt $t$ ist

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Dieser Vektor steht senkrecht auf der Verbindungsstrecke vom Ursprung zum Punkt $f(t)$, ist also tangential zum Einheitskreis, wenn wir ihn im Punkt $f(t)$ ansetzen.

Man betrachtet nicht nur Zahlenfolgen, sondern auch Folgen von Punkten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in der Ebene. Die Koordinaten von $a_n$ schreiben wir als $a_{n,1}$ und

$a_{n,2}$. Die Definition von Häufungspunkten und Grenzwerten überträgt sich wortwörtlich auf den Fall von Punktfolgen in der Ebene. Eine Komplikation ergibt sich beim Beweis des verallgemeinerten Satzes von Bolzano-Weierstraß, da die Aussage $a < b$ für Punkte nicht definiert ist.

**Satz 24 (Bolzano-Weierstraß)** *Jede beschränkte Folge von Punkten in $\mathbb{R}^2$ hat einen Häufungspunkt.*

*Beweis.* Nach dem Analogon von Satz 3 genügt es zu beweisen, dass die Folge $a_n$ eine konvergente Teilfolge hat.

Die Beschränktheit bedeutet, dass die Folge der Zahlen $|a_n|$ eine obere Schranke hat. Diese ist dann auch eine obere Schranke für die Zahlenfolgen $|a_{n,1}|$ und $|a_{n,2}|$. Nach Satz 1 hat die Folge $a_{n,1}$ eine Häufungspunkt, und nach Satz 3 hat sie eine konvergente Teilfolge. Die entsprechende Teilfolge von $a_{n,2}$ hat nach Satz 1 ebenfalls einen Häufungspunkt und somit eine konvergente Teilfolge. Zu dieser gehört eine Teilfolge von $a_{n,1}$, die bereits konvergiert, und somit konvergiert auch die entsprechende Teilfolge von Punkten $a_n$. □

Für Abbildungen $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$ (die wir auch als vektorwertige Funktionen bezeichnen) definieren wir die Norm

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [t_1, t_2]\}$$

ganz wie im skalarwertigen Fall. Der Beweis des Cauchy-Kriteriums (Satz 12) überträgt sich einschließlich Beweis auf die gleichmäßige Konvergenz von Folgen vektorwertiger Funktionen.

Nun können wir das Integral zunächst für vektorwertige Treppenfunktionen und dann für vektorwertige Regelfunktionen genau wie im skalarwertigen Fall definieren. Es ergibt sich

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \left(\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\,dt, \int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\,dt\right).$$

Dies ist für Treppenfunktionen offensichtlich, und es folgt für Regelfunktionen durch Grenzübergang.

Auch für stetig differenzierbare Funktionen $F : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$ gilt damit der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_{t_1}^{t_2} F'(t)\,dt = F(t_2) - F(t_1).$$

Integrieren wir also den Geschwindigkeitsvektor als Funktion der Zeit, so erhalten wir den Vektor vom Anfangspunkt zum Endpunkt der Bewegung. Es gilt auch das Analogon von Satz 14:

**Satz 25** *Ist $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$ eine Regelfunktion, so ist auch $|f|$ eine Regelfunktion, und*

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|\, dt.$$

*Beweis.* Dass $|f|$ eine Regelfunktion ist, beweist man wie im skalarwertigen Fall, ebenso den Spezialfall der Ungleichung für Treppenfunktionen. Haben wir nun eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen die Regelfunktion $f$ konvergiert, so folgt die Ungleichung für $f$ durch Grenzübergang. (Die Ungleichung aus Satz 13 ergibt hier übrigens keinen Sinn und kann nicht verwendet werden.) □

Kombinieren wir den letzten Satz mit dem Hauptsatz, so folgt für stetig differenzierbare Funktionen $f$

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f'(x)|\, dt.$$

Die rechte Seite der Ungleichung bezeichnen wir als Länge der Kurve, die durch $f$ gegeben ist. Der Satz drückt also aus, dass die gerade Linie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist.

*Beispiel.* Es sei $f(t) = (\cos t, \sin t)$ wie im vorigen Beispiel. Durchläuft $t$ das Intervall $[t_1, t_2]$, so durchläuft $f(t)$ einen Kreisbogen der Länge

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = t_2 - t_1.$$

*Beispiel.* Die Abbildung $f(t) = (t, t^2)$ beschreibt eine Bewegung entlang einer Parabel. Es gilt $f'(t) = (1, 2t)$ und $|f'(t)| = \sqrt{1 + (2t)^2}$. Die Länge des Parabelbogens zwischen den Punkten mit den ersten Koordinaten $t_1$ bzw. $t_2$ ist also

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (2t)^2}\, dt = \frac{1}{2} \int_{2t_1}^{2t_2} \sqrt{1 + x^2}\, dx,$$

wobei wir die Substitution $x = 2t$ benutzt haben. Dieses Integral wurde bereits in Aufgabe 22 berechnet. Die Antwort lautet

$$\frac{1}{4} \left[ \operatorname{arsinh} 2t + 2t\sqrt{1 + (2t)^2} \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Wenden wir die Substitutionsmethode auf die Kurvenlänge an, so erhalten wir für eine stetig differenzierbare Funktion $g : [s_1, s_2] \to [t_1, t_2]$, wobei $g(s_1) = t_1$, $g(s_2) = t_2$, dass

$$\int_{t_1}^{t_2} |f'(t)|\, dt = \int_{s_1}^{s_2} |f'(g(s))|\, g'(s) ds.$$

Ist $g'$ überall positiv, so können wir es mit zwischen die Betragsstriche schreiben, und mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich

$$\int_{t_1}^{t_2} |f'(t)|\, dt = \int_{s_1}^{s_2} |(f \circ g)'(s)|\, ds.$$

Die Abbildung $f \circ g$ durchläuft die selbe Kurve mit einer anderen Geschwindigkeit, aber die Länge der Kurve bleibt die selbe.

Alle Betrachtungen, die wir für die Ebene angestellt haben, übertragen sich in offensichtlicher Weise auf den Raum, den wir mit der Menge $\mathbb{R}^3$ der geordneten Tripel $(a_1, a_2, a_3)$ von reellen Zahlen identifizieren können.

# 13 Elliptische Integrale

Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen Punkten (genannt Brennpunkte) gleich einer gegebenen Konstante ist. Wir wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so dass die $x$-Achse durch die Brennpunkte geht und der Koordinatenursprung der Mittelpunkt ihrer Verbindungsstrecke ist. Die Brennpunkte sind dann $(c, 0)$ und $(-c, 0)$ für eine positive Zahl $c$, ihren Abstand $2c$ nennt man die lineare Exzentrizität der Ellipse. Die Ellipse besteht aus allen Punkten $(x, y)$ mit der Eigenschaft

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$

wobei $a > c$ eine feste Zahl ist. Wir wollen dies in eine algebraische Gleichung umformen, d. h. eine Gleichung, in der nur die Grundrechenarten vorkommen. Das Quadrieren beider Seiten ergibt

$$(x-c)^2+(x+c)^2+2y^2+2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2.$$

Multiplizieren wir links die Quadrate aus, kürzen durch 2 und bringen alles außer den Wurzeln auf die rechte Seite, so erhalten wir

$$\sqrt{x^2+y^2+c^2-2cx}\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cx}=2a^2-x^2-c^2-y^2.$$

Nochmaliges Quadrieren liefert

$$(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)=(x^2+y^2+c^2-2a^2)^2.$$

Mit Hilfe der zweiten und dritten binomischen Formel erhalten wir

$$(x^2+y^2+c^2)^2-(2cx)^2=(x^2+y^2+c^2)^2-2\cdot 2a^2(x^2+y^2+c^2)+(2a^2)^2.$$

Glücklicherweise kürzen sich die biquadratischen Terme weg, und mit der Bezeichnung $b=\sqrt{a^2-c^2}$ erhalten wir

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Obwohl das Quadrieren im Allgemeinen keine äquivalente Umformung ist, kann man sich überzeugen, dass in diesem Fall keine Lösungen hinzugekommen sind. Die Korodinatenachsen sind Symmetrieachsen der Ellipse und schneiden diese in den Punkten $(\pm a, 0)$ und $(0, \pm b)$. Die Zahlen $a$ und $b$ nennt man die große und die kleine Halbachse.

Die Ellipse lässt sich als Kurve parametrisieren durch die Abbildung

$$f(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Die Länge des Ellipsenbogens zwischen den Punkten $f(t_1)$ und $f(t_2)$ ist

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt.$$

Ist $x = a \cos t$ als Funktion von $t$ auf $[t_1, t_2]$ monoton, so können wir eine Substitution vornehmen. Wenn sie z. B. monoton fallend ist, also

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t = -a\sqrt{1 - \cos^2 t} = -\sqrt{a^2 - x^2},$$
$$a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = a^2(1 - \cos^2 t) + b^2 \cos^2 t = a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2,$$

so erhalten wir mit der Bezeichnung $k = \frac{c}{a}$

$$l = \int_{x_2}^{x_1} \frac{\sqrt{a^2 - k^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \int_{x_2}^{x_1} \frac{a^2 - k^2x^2}{\sqrt{(a^2 - k^2x^2)(a^2 - x^2)}}\, dx.$$

Dies erhält man übrigens unmittelbar, wenn man die Parametrisierung

$$g(x) = \left(x, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)$$

für die obere Hälfte der Ellipse benutzt. Im Fall $c = 0$, also $a = b$ (wenn die Ellipse ein Kreis ist), ergibt sich bekanntlich

$$l = a(t_2 - t_1) = a(\arccos x_1 - \arccos x_2).$$

Für $c \neq 0$ ist die Stammfunktion keine elementare Funktion.

Allgemeiner nennt man alle Integrale der Form

$$\int r\bigl(x, \sqrt{p(x)}\,\bigr)\, dx$$

elliptische Integrale, bei denen $p$ ein Polynom vom Grad 3 oder 4 und $r$ eine rationale Funktion in zwei Variablen ist, also

$$r(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

für Polynome $f$ und $g$. Ist $p$ ein Polynom vom Grad $m > 4$, so spricht man von hyperelliptischen Integralen.

Angenommen, $p$ hat eine Nullstelle $c$. Dann ist

$$p(x) = (x - c)q(x),$$

wobei $q$ ein Polynom vom Grad $m - 1$ ist. Wir wollen die Substitution

$$x = \frac{1}{u} + c$$

vornehmen, so dass

$$u = \frac{1}{x - c}, \qquad \frac{dx}{du} = -\frac{1}{u^2}.$$

Das Polynom $q$ hat die Form

$$q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{m-1} x^{m-1}.$$

Bei der Substitution erhalten wir

$$q\left(\frac{1 + cu}{u}\right) = \frac{a_0 u^{m-1} + a_1(1 + cu)u^{m-2} + \cdots + a_{m-1}(1 + cu)^{m-1}}{u^{m-1}} = \frac{p_1(u)}{u^{m-1}}$$

für ein Polynom $p_1$ vom Grad $m - 1$. Es ergibt sich

$$\int r\big(x, \sqrt{p(x)}\,\big)\, dx = -\int r\left(\frac{1}{u} + c, \sqrt{\frac{p_1(u)}{u^m}}\right) \frac{du}{u^2}$$

Ist $m = 2n$ eine gerade Zahl, so ist

$$\sqrt{\frac{p_1(u)}{u^m}} = \frac{\sqrt{p_1(u)}}{u^n},$$

und wir erhalten

$$\int r\big(x, \sqrt{p(x)}\,\big)\, dx = \int r_1\big(u, \sqrt{p_1(u)}\,\big)\, du$$

für eine rationale Funktion $r_1$. Damit lässt sich z. B. in einem elliptischen Integral der Grad des Polynoms unter der Wurzel, wenn es eine Nullstelle hat, auf 3 verringern.

Ist das Polynom unter der Wurzel quadratisch und hat eine Nullstelle, so können wir den Grad auf 1 verringern, d. h. $p_1(u) = au + b$. Mit der weiteren Substitution $v = \sqrt{au + b}$ kommen wir auf ein Integral einer rationalen Funktion in einer Variablen.

Jede rationale Funktion in einer Variablen hat übrigens eine elementare Stammfunktion. Dies folgt daraus, dass sie sich als Summe von Funktionen der Art

$$ax^n, \qquad \frac{a}{(x-c)^n}, \qquad \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$$

schreiben lässt. Wir werden die Existenz einer solchen Partialbruchzerlegung hier nicht beweisen.

Auch elliptische Intgegrale lassen sich auf ihre einfachsten Grundarten zurückführen, nämlich

$$r_1\bigl(x, \sqrt{p(x)}\,\bigr), \qquad \int r_2(x)\,dx,$$
$$\int \frac{ax^n\,dx}{\sqrt{p(x)}}, \qquad \int \frac{a\,dx}{(x-c)\sqrt{p(x)}}, \qquad \int \frac{(ax+b)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{p(x)}},$$

wobei $r_1$ und $r_2$ rationale Funktionen sind und $n \in \{0, 1, 2\}$.

# 14 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir wollen zur Motivation zunächst einige Anwendungsprobleme der Differentialrechnung betrachten.
*Beispiel.* Es sei $Q$ die Ladung in einer Platte eines Kondensators, $-Q$ die in der anderen Platte. Sie ist proportional zur Spannung $U$ zwischen den Platten, und den Proportionalitätsfaktor nennt man Kapazität $C$, also

$$Q = CU.$$

Ist $I$ die Stärke des Stroms, der auf der einen Seite hinein- und auf der anderen herausfließt, so gilt

$$\frac{dQ}{dt} = I.$$

Haben wir hingegen einen metallischen Leiter, so ist die Stärke $I$ des Stroms nach dem Ohmschen Gesetz proportional zur Spannung $U$ zwischen seinen Enden, und den umgekehrten Proportionalitätsfaktor nennt man den Widerstand $R$, also

$$U = RI.$$

Natürlich bedeuten $U$ und $I$ für verschiedene Objekte nicht dasselbe. Verbinden wir aber Kondensator und Leiter zu einem Schaltkreis, so fließt durch beide Objekte der selbe Strom, und die Spannungen addieren sich zu 0, also

$$\frac{dQ}{dt} = I, \qquad RI + \frac{Q}{C} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen können wir $I$ eliminieren, und wir erhalten eine Gleichung, in der nur noch $Q$ als unbekannte Funktion der Zeit $t$ vorkommt:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}.$$

Bis auf einen konstanten Faktor stimmt die Ableitung der Funktion $Q$ also mit $Q$ überein. Dies erinnert uns an die Exponentialfunktion, und in der Tat ist

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

für jede Konstante $Q_0$ eine Lösung. Sie beschreibt die Entladung eines Kondensators, der zum Zeitpunkt $t = 0$ die Ladung $Q_0$ hat.

**Definition 20** *Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, in der eine unbekannte Funktion vorkommt. Genauer gesagt kommen der Wert der Funktion und ihrer Ableitungen an einer Stelle des Definitionsbvereiches vor, und die Gleichung soll für jede Stelle des Definitionsbereiches gelten.*

Ist eine Funktion von mehreren Variablen gesucht, so kommen in der Differentialgleichung ihre partiellen Ableitungen vor, und man spricht von einer partiellen Differentialgleichung. Im Folgenden wird die gesuchte Funktion nur von einer Variablen abhängen. Dann gibt es nur die gewöhnlichen Ableitungen, und man spricht von gewöhnlichen Differentialgleichungen.
*Beispiel.* Der Graph einer zweimal differenzierbaren Funktion beschreibe die Form einer hängenden Kette. Da die Koordinaten üblicherweise mit $x$ und $y$ bezeichnet werden, benutzt man häufig $y$ als Symbol der Funktion, also $y : [a, b] \to \mathbb{R}$. Die Zugkräfte der Kette auf die Haltepunkte wirken in tangentialer Richtung, also am linken Endpunkt $F_a = (H_a, G_a)$ und am rechten Endpunkt $F_b = (H_b, G_b)$, wobei

$$\frac{G_a}{H_a} = f'(a), \qquad \frac{G_b}{H_b} = f'(b).$$

Nach dem Newtonschen Gesetz müssen sich die horizontalen Komponenten aufheben, also $H_a = -H_b = H$, während die Summe der vertikalen Komponenten dem Betrage nach gleich dem Gewicht $G$ der Kette ist, also $G_a + G_b = -G$. Das Gewicht eines Kettenstücks ist proportional zu seiner Länge mit einem Proportionalitätsfaktor $s$. Parametrisieren wir die Kette durch $(x, y(x))$ als Funktion von $x$ mit der Ableitung $(1, y'(x))$, so erhalten wir

$$G = s\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

Drücken wir $G_a$ und $G_b$ durch die Ableitungen an den Endpunkten aus, so ergibt sich

$$H(y'(b) - y'(a)) = s\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

Diese Gleichung gilt auch, wenn wir $[a, b]$ durch ein Teilintervall ersetzen. Bilden wir die Ableitung nach $b$, so erhalten wir nach Satz 19

$$Hy''(b) = s\sqrt{1 + y'(b)^2}.$$

Dies gilt auch für jedes $x \in [a, b]$ anstelle von $b$, so dass

$$y''(x) = \frac{s}{H}\sqrt{1 + y'(x)^2}.$$

Wir suchen hier nach der unbekannten Funktion $y$. Es handelt sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, weil auch die zweite Ableitung auftritt.

*Beispiel.* Ein Massenpunkt mit der Masse $m$ bewege sich unter dem Einfluss einer ortsabhängigen Kraft $F(x)$ auf einer Geraden. Nach dem Newtonschen Gesetz gilt

$$F = ma,$$

wobei $a$ die Beschleunigung bezeichnet. Dies ist die Ableitung der Geschwindigkeit $v$ nach der Zeit, und $v$ ist wiederum die Ableitung von $x$ nach der Zeit, wobei $x(t)$ die Position zum Zeitpunkt $t$ ist. Nach Newton verwendet man für die Ableitung einer Funktion $x$ nach der Zeit statt $x'$ die Bezeichnung $\dot{x}$, also

$$v = \dot{x}, \qquad a = \dot{v}.$$

Wir erhalten also die Gleichung

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)).$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der gesuchten Funktion $x$. Man kann statt dessen auch das System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ m\dot{v}(t) = F(x(t)) \end{cases}$$

mit den gesuchten Funktionen $x$ und $v$ betrachten.

Ist die Kraft $F$ ortsunabhängig, so finden wir die gesuchte Funktion durch zweimaliges Integrieren:

$$v(t) = \int_0^t \frac{F}{m}\, du = \frac{F}{m}\, t + v_0, \qquad x(t) = \int_0^t v(u)\, du = \frac{F}{2m}\, t^2 + v_0 t + x_0$$

mit gewissen Integrationskonstanten $v_0$ und $x_0$. Offensichtlich ist $x_0$ die Position und $v_0$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$. Ist $F$ die Gewichtskraft und $x$ der Fallweg, so erhält man das Fallgesetz von Galilei.

Bewegt sich der Punkt in der Ebene, so müssen wir seine Position zum Zeitpunkt $t$ mit $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ bezeichnen und die Kraft an der Stelle $x$ mit $F(x) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$. Die Newtonsche Bewegungsgleichung gilt auch hier, aber sie ist dann eine Gleichung zwischen Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^2$. Wenn man sie koordinatenweise hinschreibt, erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) = F_1(x_1(t), x_2(t)), \\ m\ddot{x}_2(t) = F_2(x_1(t), x_2(t)). \end{cases} \tag{3}$$

Betrachten wir z. B. die Bewegung im Gravitationsfeld eines feststehenden Massenpunktes mit der Masse $M$ im Koordinatenursprung. Dann ist nach dem Gravitationsgesetz der Betrag der Gewichtskraft im Punkt $x$ gegeben durch

$$|F(x)| = \gamma \, \frac{mM}{|x|^2}.$$

Die Richtung der Gewichtskraft zeigt von $x$ zum Koordinatenursprung, und wir erhalten

$$F(x) = -\gamma \, \frac{mM}{|x|^3} \, x,$$

also ausführlich

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= -\gamma m M \, \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}, \\ F_2(x_1, x_2) &= -\gamma m M \, \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Bewegungsgleichung ein, so kürzt sich $m$ heraus. Die Bewegung eines Massenpunktes im Schwerefeld ist also unabhängig von seiner eigenen Masse.

# 15 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Wir betrachten gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, die die Form

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{4}$$

haben, wobei die gegebenen Funktionen $f$ und $g$ auf Intervallen definiert sind.

**Satz 26** *Gegebenen seien stetige Funktionen $f$ und $g$ auf Intervallen $I$ und $J$, wobei $g$ keine Nullstelle hat, und Punkte $a \in I$, $b \in J$. Wir setzen*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad G(y) = \int_b^y g(u)\,du.$$

*Ist der Wertevorrat von $F$ in dem von $G$ enthalten, so gibt es genau eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (4), die den Anfangswert*

$$y(a) = b$$

*hat, und sie ist durch die Gleichung*

$$G(y(x)) = F(x) \tag{5}$$

*bestimmt.*

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass jede Lösung der Differentialgleichung (4), die den Anfangswert $y(a) = b$ hat, die Gleichung (5) erfüllt: Aus (4) folgt

$$g(y(x))y'(x) = f(x),$$

also

$$\int_a^x g(y(t))y'(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Mit der Substitution $u = y(t)$ erhält man

$$\int_{y(a)}^{y(x)} g(u)\,du = \int_a^x f(t)\,dt,$$

und angesichts von $y(a) = b$ ist dies gerade die Gleichung (5).

Wegen $G'(y) = g(y) \neq 0$ ist $G$ streng monoton auf dem Intervall $J$ und besitzt eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $H$. Wir können die Gleichung (5) also auch durch

$$y(x) = H(F(x))$$

ausdrücken.

Um die Existenz einer Lösung zu beweisen, benutzen wir die letzte Gleichung als Definition der Funktion $y$. Die Verkettung ist definiert, denn jeder Wert von $F$ ist nach Aufgabenstellung enthalten im Wertevorrat von $G$, und dieser ist der Definitionsbereich von $H$. Nun ist $y$ stetig differenzierbar, es gilt (5), und nach der Kettenregel ist

$$G'(y(x))y'(x) = F'(x),$$

was wegen $G' = g$ und $F' = f$ gleichbedeutend mit der Differentialgleichung (4) ist. Wegen $F(a) = G(b) = 0$ folgt schließlich

$$y(a) = H(F(a)) = H(0) = b.$$

□

Ist die Voraussetzung über die Wertevorräte nicht erfüllt, kann man sie u. U. durch Verkleinerung von $I$ erzwingen.

Durch Verwendung der Leibnizschen Schreibweise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

wird die Lösungsmethode besonders einprägsam: Wir multiplizieren beide Seiten mit $g(y)$ und $dx$ und erhalten formal die Gleichheit

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

zwischen „unendlich kleinen Größen". Nun setzen wir Integralzeichen davor:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx.$$

Dies ergibt die im Satz bewiesene Gleichheit der Stammfunktionen. Es bleibt die Aufgabe, diese Stammfunktionen explizit zu berechnen und die entstehende Gleichung nach $y$ aufzulösen. Beide Schritte sind nur in günstigen Fällen möglich.

*Beispiel.* Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1+y^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

die natürlich nur für $|x| \leq 1$ definiert ist. Wir schreiben $y'$ als $\frac{dy}{dx}$. Es ist möglich, zumindest für $|x| < 1$ alle Faktoren mit $y$ und $dy$ auf eine Seite und alle Faktoren mit $x$ und $dx$ auf die andere Seite zu bringen:

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nun erhalten wir nach dem obigen Schema

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Zum Glück sind beide unbestimmten Integrale elementare Funktionen:

$$\arctan y = \arcsin x + C.$$

Wir haben wieder Glück, denn diese Gleichung lässt sich explizit nach $y$ auflösen:

$$y = \tan(\arcsin x + C).$$

Ist zum Beispiel der Anfangswert $y(\frac{1}{2}) = 1$ vorgegeben, so erhalten wir durch Einsetzen

$$1 = \tan\left(\frac{\pi}{6} + C\right).$$

Wegen $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ ist zum Beispiel $C = \frac{\pi}{12}$ möglich. Da die Tangensfunktion periodisch ist und auf jeder Periode jeden Wert genau einmal annimmt, ist $C$ bis auf Vielfache von $\pi$ festgelegt, und die Lösung

$$y = \tan\left(\arcsin x + \frac{\pi}{12}\right)$$

ist die einzige mit dem geforderten Anfangswert.

Man kann die allgemeine Lösung auch ohne Winkelfunktionen angeben. Schreiben wir $\arcsin x = u$ und $\tan C = a$, so gilt wegen $\cos u > 0$

$$\tan x = \frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

und mit dem Additionstheorem

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

erhalten wir

$$y = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + a}{1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,a}.$$

Durch Erweitern des Bruchs vereinfacht sich dies zu

$$y = \frac{x + a\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} - ax}.$$

Um Rechenfehler auszuschließen, empfiehlt sich eine Probe, dass dies tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung ist.

*Beispiel.* Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, ist die Form einer hängenden Kette (eine sogenannte Kettenlinie) der Graph einer Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = a\sqrt{1 + y'^2},$$

der Parameter $a$ vom Gewicht pro Längeneinheit und den horizontalen Komponenten der Zugkräfte auf die Aufhängungspunkte abhängt. Bezeichnen wir die Ableitung der Funktion $y$ mit $v$, so erfüllt diese die Differentialgleichung erster Ordnung

$$v' = a\sqrt{1 + v^2}.$$

Dies ist eine Gleichung mit getrennten Variablen, und die obige Methode liefert

$$\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = a\,dx.$$

Durch Integration finden wir

$$\operatorname{arsinh} v = ax + c$$

mit einer Integrationskonstanten $c$, das heißt

$$y' = v = \sinh(ax + c).$$

Nochmalige Integration ergibt

$$ay + b = \cosh(ax + c)$$

mit einer weiteren Konstanten $b$. Jede Kettenlinie ist also ähnlich (im geometrischen Sinne) zum Graphen der Funktion *cosinus hyperbolicus*.

# 16 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Damit meinen wir Gleichungen der Form

$$y' = f(x)y + g(x),$$

wobei $f$ und $g$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I$ sind. Ist die Funktion $g$ identisch gleich Null, so spricht man von einer homogenen linearen Differentialgleichung. Zu jeder linearen Differentialgleichung erster Ordnung gehört eine homogene Gleichung, die man erhält, wenn man den Term $g(x)$ weglässt.

**Satz 27** *Sind $y_1$ und $y_2$ Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung und $a_1$, $a_2$ reelle Zahlen, so ist auch $a_1y_1 + a_2y_2$ eine Lösung dieser Differentialgleichung.*

*Es sei $y_0$ irgendeine Lösung einer linearen Differentialgleichung und $y$ eine differenzierbare Funktion. Die Funktion $y_0+y$ ist genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn $y$ eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist.*

*Beweis.* Sind $y_1$, $y_2$, $a_1$ und $a_2$ wie angegeben, so gilt nach den Ableitungsregeln

$$\begin{aligned}(a_1y_1(x) + a_2y_2(x))' &= a_1y_1'(x) + a_2y_2'(x)\\ &= a_1f(x)y_1(x) + a_2f(x)y_2(x) = f(x)\big((a_1y_1(x) + a_2y_2(x)\big),\end{aligned}$$

wie gefordert.

Ist $y_0$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung, so gilt

$$(y_0(x) + y(x))' = y_0'(x) + y'(x) = (f(x)y_0(x) + g(x)) + y'(x).$$

Damit $y_0 + y$ ebenfalls eine Lösung ist, muss die rechte Seite gleich

$$f(x)(y_0(x) + y(x)) + g(x)$$

sein, und dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn $y'(x) = f(x)y(x)$ ist, wie behauptet. □

Der Satz und sein Beweis übertragen sich übrigens auf lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung $n$

$$y^{(n)} = f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y + g(x).$$

Wir sehen, dass man die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung finden kann, indem man irgendeine (wie man sagt, eine partikuläre) Lösung findet und zu dieser eine beliebige Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung addiert.

Wir befassen uns zunächst mit der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x)y.$$

Hier kann man die Variablen (unter der Voraussetzung $y \neq 0$) trennen und erhält in der Leibnizschen Schreibweise

$$\frac{dy}{y} = f(x)\,dx.$$

Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, so folgt

$$\ln|y| = F(x) + C,$$

also

$$y = \pm e^{F(x)+C}.$$

Mit der Bezeichnung $\pm e^C = a$ nimmt dies die Form

$$y = ae^{F(x)}$$

an. Auch im Fall $a = 0$ ergibt sich eine Lösung, bei der $y$ identisch gleich Null ist (d. h. für alle $x \in I$ gilt $y(x) = 0$). Diese mussten wir bei der Trennung der Variablen ausschließen. Damit haben wir die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung gefunden. Sie ist auf dem gesamten Intervall $I$ definiert. Da die Exponentialfunktion nur von Null verschiedene Werte annimmt, kann man durch geeignete Wahl von $a$ jede Anfangswertbedingung befriedigen.

Nun kommen wir zur inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung. Wir machen den Ansatz

$$y(x) = a(x)e^{F(x)},$$

wobei $F$ wie oben eine Stammfunktion von $f$ bezeichnet. Anstelle der Konstanten $a$ steht jetzt eine veränderliche Größe, daher nennt man diese Methode traditionell „Variation der Konstanten". Natürlich kann man jede Funktion $y$ auf dem Intervall $I$ in dieser Form schreiben, denn man erhält die zugehörige Funktion $a$, indem man beide Seiten mit $e^{-F(x)}$ multipliziert. Der Kunstgriff besteht darin, dass sich die Differentialgleichung

$$y' = f(x)y + g(x)$$

vereinfacht, wenn wir $y(x)$ so ansetzen. Nach den Ableitungsregeln ergibt sich

$$a'(x)e^{F(x)} + a(x)e^{F(x)}F'(x) = f(x)a(x)e^{F(x)} + g(x),$$

und wegen $F' = f$ verbleibt nur

$$a'(x)e^{F(x)} = g(x).$$

Diese Gleichung können wir nach $a$ auflösen und integrieren:

$$a(x) = \int g(x)e^{-F(x)}dx.$$

Es bleibt die Stammfunktion zu finden und für $a$ einzusetzen. Wir sehen, dass auch für die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung jede Lösung auf dem gesamten Intervall $I$ definiert ist.
*Beispiel.* Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \sin x - \frac{x+1}{x}\,y$$

mit der Anfangsbedingung $y(\pi) = 0$. Die rechte Seite ist nur für $x \neq 0$ definiert, und angesichts des geforderten Anfangswertes beschränken wir uns auf das Intervall $(0, \infty)$. Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$y' = -\frac{x+1}{x}\,y.$$

Die Funktion $f(x) = -\frac{x+1}{x} = -1 - \frac{1}{x}$ hat die Stammfunktion

$$F(x) = -x - \ln x,$$

und die homogene Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$y = ax^{-1}e^{-x}.$$

Nun fassen wir $a$ als Funktion von $x$ auf und setzen sie in die ursprüngliche (inhomogene) Differentialgleichung ein:

$$a'(x)x^{-1}e^{-x} + a(x)\left(x^{-1}e^{-x}\right)' = \sin x - \frac{(x+1)}{x}\,a(x)x^{-1}e^{-x}.$$

Die Terme mit dem Wert von $a$ kürzen sich weg, und es bleibt eine Gleichung, die nur $a'$ enthält:

$$a'(x)x^{-1}e^{-x} = \sin x,$$

also

$$a'(x) = xe^x \sin x.$$

Um die Stammfunktion zu bestimmen, erinnern wir zunächst daran, dass

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C,$$
$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C,$$

wobei $C$ nicht immer die selbe Konstante sein muss. Dies findet man durch zweimalige partielle Integration wie in Aufgabe 21. Auch auf das gesuchte Integral wenden wir partielle Integration an, wobei wir $e^x$ als Ableitung interpretieren:

$$\begin{aligned}\int xe^x \sin x \, dx &= xe^x \sin x - \int e^x (\sin x + x \cos x) \, dx \\ &= xe^x \sin x - \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) - \int xe^x \cos x \, dx.\end{aligned}$$

Mit dem verbliebenen Integral verfahren wir ebenso:

$$\begin{aligned}\int xe^x \cos x \, dx &= xe^x \cos x - \int e^x (\cos x - x \sin x) \, dx \\ &= xe^x \cos x - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + \int xe^x \sin x \, dx.\end{aligned}$$

Fassen wir zusammen, so ergibt sich

$$\int xe^x \sin x \, dx = e^x (x \sin x + (1 - x) \cos x) - \int xe^x \sin x \, dx.$$

Bringen wir die unbestimmten Integrale auf die linke Seite und dividieren durch 2, so erhalten wir schließlich

$$a(x) = \int xe^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (x \sin x + (1 - x) \cos x) + C.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = Cx^{-1} e^{-x} + \frac{1}{2} \left( \sin x + \frac{1 - x}{x} \cos x \right).$$

Da sich für $x = \pi$ der Wert $y = 0$ ergeben soll, ist

$$C = \frac{1 - \pi}{2} e^\pi.$$

# 17 Harmonische Schwingungen

Wir betrachten zunächst ein motivierendes Beispiel. Ein Massenpunkt der Masse $m$ sei an einer Feder aufgehängt. Der Einfachheit halber betrachten wir nur Bewegungen entlang der senkrechten Geraden, die durch den Aufhängungspunkt geht. Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Federkraft proportional zur Abweichung $x$ von der Gleichgewichtslage (zumindest näherungsweise für kleine Auslenkungen). Den Proportionalitätsfaktor $k$ nennt man Federkonstante. Die Newtonsche Bewegungsgleichung wird zu

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Wir suchen also eine Funktion, die bis auf eine negative Konstante mit ihrer zweiten Ableitung übereinstimmt. Im Falle der Konstanten $-1$ erfüllen dies die Sinus- und Cosinusfunktion. Man kommt wie beim Entladevorgang des Kondensators auf die Idee, das Argument $t$ mit einer positiven Konstanten $\omega$ zu multiplizieren. In der Tat ist

$$(\sin \omega t)^{\cdot\cdot} = -\omega^2 \sin \omega t, \qquad (\cos \omega t)^{\cdot\cdot} = -\omega^2 \cos \omega t.$$

Wir sollten also $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ wählen. Da die Differentialgleichung linear ist, ist die Funktion

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$$

für beliebige Konstanten $a$ und $b$ eine Lösung. Diese haben auch eine physikalische Bedeutung. Wegen

$$x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = b$$

sind dies die Anfangswerte des Ortes und der Geschwindigkeit. Die Zahl

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

bezeichnet man als Amplitude. Da der Punkt $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ auf dem Einheitskreis liegt, gibt es eine Zahl $\varphi$, so dass

$$\frac{a}{c} = \cos \varphi, \qquad \frac{b}{c} = \sin \varphi,$$

und mit dem Additionstheorem ergibt sich

$$x(t) = c(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) = c \sin(\omega t + \varphi).$$

Eine Schwingung, die sich so durch die Sinusfunktion beschreiben lässt, nennt man harmonisch. Die Zahl $\omega$ ist ihre Kreisfrequenz, der Winkel $\varphi$ ist ihre

Phase zum Zeitpunkt 0. Die Frequenz (die Zahl der Perioden pro Zeiteinheit) ist $\frac{\omega}{2\pi}$.

Man kann die Situation verallgemeinern, indem man die Schwingung dämpft und den Aufhängungspunkt vertikal bewegt. Ist die Höhe des Aufhängungspunktes durch eine Funktion $f(t)$ gegeben und die Dämpfungskraft proportional zur Geschwindigkeit, so erhalten wir die Gleichung

$$m\ddot{x} = k(f(t) - x) - l\dot{x}.$$

Betrachten wir also gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d. h.

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = g(t). \tag{6}$$

**Satz 28** *Eine Lösung der Differentialgleichung (6) auf einem Intervall $I$ ist eindeutig durch ihre Anfangswerte $x(u)$ und $\dot{x}(u)$ an einer Stelle $u \in I$ bestimmt.*

*Beweis.* Die Differenz zweier Lösungen ist nach Satz 27 eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0. \tag{7}$$

Es genügt also zu zeigen, dass jede Lösung $x$ der homogenen Gleichung mit $x(u) = 0$ und $\dot{x}(u) = 0$ identisch gleich Null ist. Die Funktion

$$w(t) = x(t)^2 + \dot{x}(t)^2$$

hat ebenfalls die Nullstelle $u$, und es gilt

$$\dot{w} = 2(x\dot{x} + \dot{x}\ddot{x}) = 2((1-q)x\dot{x} - p\dot{x}^2).$$

Aus der Dreiecksungleichung ergibt sich wegen $2|x\dot{x}| \leq x^2 + \dot{x}^2$, dass

$$|\dot{w}| \leq Cw,$$

wobei $C = 2|p| + |1-q|$. Angenommen, es gibt eine Stelle $s$, wo $w$ nicht Null ist. Wegen der Stetigkeit gilt das auch für $r$ in einer Umgebung von $s$, und nach dem Hauptsatz ist

$$\ln w(r) - \ln w(s) = \int_s^r \frac{\dot{w}(t)}{w(t)}\,dt,$$

also nach Satz 14

$$\left|\ln \frac{w(r)}{w(s)}\right| \leq C|r-s|$$

und somit

$$w(s)e^{-C|r-s|} \leq w(r) \leq w(s)e^{C|r-s|}.$$

Ist $u$ das Infimum der Menge der Nullstellen von $w$ rechts von $s$, so ergibt sich

$$\lim_{\substack{r \to u \\ r < u}} w(r) \geq w(s)e^{-C|u-s|}$$

im Widerspruch zu $w(u) = 0$. Ähnlich führt der Fall, dass $w$ Nullstellen links von $s$ hat, zum Widerspruch. □

Nun suchen wir nach Lösungen für die homogene Differentialgleichung (7).

**Satz 29** *Es seien $p$ und $q$ reelle Zahlen und $D = \frac{p^2}{4} - q$.*

*(i) Ist $D > 0$, so hat die Differentialgleichung (7) die allgemeine Lösung*

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t},$$

*wobei $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Lösungen der charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

*sind.*

*(ii) Ist $D = 0$, so hat die Differentialgleichung (7) die allgemeine Lösung*

$$x(t) = (at + b)e^{\lambda t}$$

*wobei $\lambda$ die Lösung der charakteristischen Gleichung ist.*

*(iii) Ist $D < 0$, so hat die Differentialgleichung (7) die allgemeine Lösung*

$$x(t) = e^{-pt/2}\left(a \sin \omega t + b \cos \omega t\right),$$

*wobei $\omega = \sqrt{-D}$.*

*Beweis.* Zunächst machen wir den Ansatz $x = e^{\lambda t}$. Einsetzen ergibt

$$(e^{\lambda t})^{\cdot\cdot} + p(e^{\lambda t})^{\cdot} + qe^{\lambda t} = (\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda t},$$

und dies ist genau dann identisch gleich Null, wenn $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ ist. Mit dem Ansatz $x = te^{\lambda t}$ erhalten wir

$$(te^{\lambda t})^{\cdot\cdot} + p(te^{\lambda t})^{\cdot} + qte^{\lambda t} = (\lambda^2 + p\lambda + q)te^{\lambda t} + (2\lambda + p)e^{\lambda t}.$$

Damit dies identisch gleich Null ist, muss zusätzlich $2\lambda + p = 0$ gelten, und das gilt in der Tat für eine Lösung der charakteristischen Gleichung im Fall (ii). Im Fall (iii) hat die charakteristische Gleichung keine Lösungen, und unsere bisherigen Ansätze ergeben keine Lösungen der Differentialgleichung. Motiviert durch das anfängliche Beispiel setzen wir $x = e^{\mu t} \sin \omega t$ an und erhalten

$$\begin{aligned}(e^{\mu t} \sin \omega t)^{\cdot\cdot} &+ p(e^{\mu t} \sin \omega t)^{\cdot} + q e^{\mu t} \sin \omega t \\ &= (\mu^2 - \omega^2 + p\mu + q) e^{\mu t} \sin \omega t + (2\mu + p)\omega e^{\mu t} \cos \omega t,\end{aligned}$$

und mit dem Ansatz $x = e^{\mu t} \cos \omega t$ erhalten wir

$$\begin{aligned}(e^{\mu t} \cos \omega t)^{\cdot\cdot} &+ p(e^{\mu t} \cos \omega t)^{\cdot} + q e^{\mu t} \cos \omega t \\ &= (\mu^2 - \omega^2 + p\mu + q) e^{\mu t} \cos \omega t - (2\mu + p)\omega e^{\mu t} \sin \omega t.\end{aligned}$$

Hier muss man also $\mu$ und $\omega$ so wählen, dass

$$\begin{aligned} 2\mu + p &= 0, \\ \mu^2 - \omega^2 + p\mu + q &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Bedingung ergibt sich $\mu = -\frac{p}{2}$, und setzen wir dies in die zweite ein, so wird sie zu $-D - \omega^2 = 0$. Wir haben also gezeigt, dass die angegebenen Funktionen Lösungen sind.

Für beliebig vorgegebene Zahlen $x_0$ und $x_1$ findet man eine Lösung mit den Anfangswerten $x(u) = x_0$ und $\dot{x}(u) = x_1$. Diese Bedingungen führen nämlich auf ein lineares Gleichungssystem, z. B. im Fall (i)

$$\begin{aligned} a_1 e^{\lambda_1 u} \quad &+ a_2 e^{\lambda_2 u} \quad = x_0, \\ a_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 u} &+ a_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 u} = x_1, \end{aligned}$$

und dieses hat wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ eine eindeutige Lösung $(a_1, a_2)$. Ähnliches gilt in den anderen Fällen.

Nun sei eine beliebige Lösung gegeben. Dann gibt es unter den im Satz angegebenen Lösungen eine, die an einer gegebenen Stelle die selben Anfangswerte hat. Nach Satz 28 stimmen beide Lösungen überein. □

Jede Lösung $x$ der inhomogenen Differentialgleichung (6) zweiter Ordnung lässt sich durch die Ableitung $v = \dot{x}$ zu einer Lösung des Systems erster Ordnung

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -pv - qx + g. \end{cases}$$

ergänzen. Umgekehrt ist die erste Komponente jeder Lösung $(x, v)$ dieses Systems eine Lösung der Differentialgleichung (6).

Haben wir die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (7) in der Form

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

mit Konstanten $a_1$ und $a_2$ gefunden, so können wir diese zu einer Lösung des zugehörigen homogenen Systems

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -pv - qx \end{cases}$$

ergänzen, indem wir setzen

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2, \qquad \text{wobei} \qquad v_1 = \dot{x}_1, \qquad v_2 = \dot{x}_2.$$

Die Lösung des inhomogenen Systems können wir wieder durch Variation der Konstanten finden. Betrachten wir nämlich $a_1$ und $a_2$ jetzt als Funktionen, so finden wir durch Einsetzen und Kürzen

$$\begin{cases} \dot{a}_1 x_1 + \dot{a}_2 x_2 = 0, \\ \dot{a}_1 v_1 + \dot{a}_2 v_2 = g. \end{cases}$$

Dies kann man für jedes $t$ nach $\dot{a}_1(t)$ bzw. $\dot{a}_2(t)$ auflösen und dann die Funktionen $a_1$ und $a_2$ durch Integration bestimmen.
*Beispiel.* Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

mit $\omega > 0$ hat die allgemeine Lösung

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t,$$

und wir ergänzen dies durch

$$v = a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t$$

zu einer Lösung des entsprechenden homogenen Systems. Um die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \sin \nu t \tag{8}$$

mit $0 < \nu \neq \omega$ zu finden, variieren wir die Konstanten und erhalten

$$\begin{cases} \dot{a} \sin \omega t + \dot{b} \cos \omega t = 0, \\ \omega \dot{a} \cos \omega t - \omega \dot{b} \sin \omega t = \sin \nu t. \end{cases}$$

Wir dividieren zunächst die zweite Gleichung durch $\omega$. Um nach $\dot{a}$ aufzulösen, multiplizieren wir dann die erste Gleichung mit $\sin \omega t$ und die zweite mit $\cos \omega t$ und erhalten als Summe

$$\dot{a} = \frac{1}{\omega} \cos \omega t \sin \nu t = \frac{1}{2\omega}(\sin(\omega + \nu)t - \sin(\omega - \nu)t).$$

Um nach $\dot{b}$ aufzulösen, multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\cos \omega t$ und die zweite mit $\sin \omega t$ und erhalten als Differenz

$$\dot{b} = -\frac{1}{\omega} \sin \omega t \sin \nu t = \frac{1}{2\omega}(\cos(\omega + \nu)t - \cos(\omega - \nu)t).$$

Hieraus ergibt sich durch Integration

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\cos(\omega - \nu)t}{\omega - \nu} - \frac{\cos(\omega + \nu)t}{\omega + \nu}\right) + c, \\ b &= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\sin(\omega + \nu)t}{\omega + \nu} - \frac{\sin(\omega - \nu)t}{\omega - \nu}\right) + d \end{aligned}$$

mit Konstanten $c$ und $d$ und schließlich durch Einsetzen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (8)

$$x = \frac{1}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t + c \sin \omega t + d \cos \omega t.$$

Insbesondere ergibt sich für $c = d = 0$ eine einfache partikuläre Lösung, die man schnell findet, wenn man weiß, dass der Ansatz $x = a \sin \nu t$ zum Ziel führt. Man erkennt, dass die erzwungene Schwingung eine um so größere Amplitude hat, je näher die Erregerfrequenz $\nu$ bei der Eigenfrequenz $\omega$ liegt. Diese Erscheinung nennt man Resonanz. Der Fall $\nu = \omega$ wird in Aufgabe 43 behandelt.

# 18 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Jede explizite gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form

$$y' = f(x, y), \tag{9}$$

wobei $f$ eine Funktion von zwei Variablen auf einer Teilmenge $U$ von $\mathbb{R}^2$ ist. (Es gibt auch implizite Differentialgleichungen, die nicht nach der höchsten Ableitung aufgelöst sind.) Für eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ muss natürlich der Graph, also die Menge aller Paare $(x, y(x))$ mit $x \in I$, im Definitionsbereich $U$ von $f$ liegen. Wir nehmen an, dass $f$ stetig ist. Ist $y$ eine Lösung mit dem Anfangswert $y(a) = b$, so folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt. \tag{10}$$

(Der Integrand ist als Verkettung stetiger Funktionen stetig und somit eine Regelfunktion.) Ist umgekehrt die Funktion $y$ eine stetige Lösung dieser Integralgleichung, so gilt offensichtlich $y(a) = b$, und nach Satz 19 ist $y$ differenzierbar und eine Lösung der Differentialgleichung (9). Diese Differentialgleichung zusammen mit der Anfangswertbedingung ist also äquivalent zur Integralgleichung (10).

In dem Spezialfall, dass $f$ nicht von $y$ abhängt, liefert die Integralgleichung sofort die Lösung. Im allgemeinen Fall kommt die gesuchte Funktion leider auch auf der rechten Seite vor. Setzen wir dort irgendeine stetige Funktion $y_0$ ein, so liefert uns die Formel im Allgemeinen eine andere stetige Funktion $y_1$. Wenn wir diese Operation wiederholen, erhalten wir immer neue Funktionen

$$y_{n+1}(x) = b + \int_a^x f(t, y_n(t))\, dt.$$

Dies nennt man Picard-Iteration. Wird die Folge von Funktionen konvergieren?

*Beispiel.* Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ und beginnen unsere Iteration mit der

Funktion $y_0(x) = 1$. Dann erhalten wir

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1\,dt = 1 + x,$$
$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$
$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Rechnet man noch eine Weile weiter, so kommt man zu der Vermutung, dass

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Wenn das stimmt, so ergibt sich

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Wir haben die vermutete Formel für $y_n$ damit durch vollständige Induktion bewiesen. Nun ist aber bekanntlich

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

und dies ist tatsächlich die Lösung mit dem geforderten Anfangswert.
*Beispiel.* Wir suchen nach Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = e^y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 0$. Beginnen wir mit $y_0(x) = 0$, so erhalten wir

$$y_1(x) = \int_0^x e^0 dt = x,$$
$$y_2(x) = \int_0^x e^t dt = e^x - 1,$$
$$y_3(x) = \int_0^x e^{e^t - 1} dt = ?$$

Schon die dritte Iteration ist keine elementare Funktion mehr. Andererseits können wir die Lösung leicht durch Trennung der Variablen finden, nämlich

$$y(x) = -\ln(1-x).$$

Die Picard-Iteration hat zwar keinen praktischen, aber einen unschätzbaren theoretischen Wert.

**Satz 30** *Es sei $f$ eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge $U$ von $\mathbb{R}^2$, die bezüglich der zweiten Variablen Lipschitz-stetig ist, und es sei $(a,b) \in U$.*

*(i) Es gibt ein offenes Intervall $I$, das $a$ enthält, auf dem eine Lösung $y: I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (9) mit dem Anfangswert $y(a) = b$ existiert.*

*(ii) Auf jedem offenen Intervall $I$, das $a$ enthält, gibt es höchstens eine Lösung $y: I \to \mathbb{R}$ mit dem Anfangswert $y(a) = b$.*

*Beweis.* (i) Weil $U$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass das Quadrat $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \times [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ in $U$ enthalten ist. Es sei $M$ das Supremum der Einschränkung von $|f|$ auf dieses Quadrat, welches nach einer Verallgemeinerung[2] von Satz 10 existiert, und $C$ die Lipschitz-Konstante von $f$ bezüglich der Variablen $y$. Wir wählen $\delta > 0$ derart, dass $M\delta \leq \varepsilon$ und $C\delta < 1$, und setzen $I = (a-\delta, a+\delta)$, $J = [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$.

Jeder stetigen Funktion $y: I \to J$ ordnen wir eine neue stetige Funktion $Ay$ zu, indem wir definieren

$$Ay(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt.$$

Dann gilt nach Satz 14

$$|Ay(x) - b| \leq \left| \int_a^x |f(t, y(t))|\, dt \right| \leq M\delta \leq \varepsilon,$$

die Abbildung $A$ bildet also die Menge $\mathcal{M}$ aller stetigen Funktionen $I \to J$ in sich selbst ab. (Wir setzen Betragsstriche um das Integral für den Fall, dass $x < a$.) Für zwei Funktionen $y$ und $z$ aus $\mathcal{M}$ gilt

$$Ay(x) - Az(x) = \int_a^x \big(f(t, y(t)) - f(t, z(t))\big) dt,$$

also wegen Satz 14 und der Lipschitz-Eigenschaft von $f$

$$|Ay(x) - Az(x)| \leq \left| \int_a^x C|y(t) - z(t)|\, dt \right| \leq C \sup_{t \in I} |y(t) - z(t)|\, \delta.$$

Dies können wir durch die Norm von Funktionen auf $I$ so ausdrücken:

$$\|Ay - Az\| \leq C\delta \|y - z\|.$$

[2] Eigentlich genügt es, Satz 10 auf die Funktion $f(x,b)$ anzuwenden, denn auf dem Quadrat gilt

$$|f(x,y)| \leq \sup\{f(x,b) \mid x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\} + C\varepsilon.$$

Wegen $C\delta < 1$ ist die Abbildung $A$ eine Kontraktion.

Der Beweis von Satz 5 überträgt sich wortwörtlich und zeigt, dass für eine beliebige Funktion $y_0 \in \mathcal{M}$ die Folge $y_1 = Ay_0$, $y_2 = Ay_1$, ... eine Cauchy-Folge bezüglich der Norm ist. (Dies ist genau die Folge, die durch Picard-Iteration entsteht.) Nach Satz 12 konvergiert sie gleichmäßig gegen eine Funktion $y : I \to J$, und nach Satz 11 ist $y$ ebenfalls stetig, also $y \in \mathcal{M}$. Der Rest des Beweises von Satz 5 zeigt nun, dass $y$ der einzige Fixpunkt der Abbildung $A$ in $\mathcal{M}$ ist. Solch ein Fixpunkt ist eine stetige Funktion $y : I \to J$, die der Integralgleichung (10) genügt.

(ii) Es sei $I$ ein beliebiges Intervall, auf dem zwei Lösungen $y$, $z : I \to \mathbb{R}$ mit $y(a) = z(a) = b$ existieren. Angenommen, es gibt Stellen rechts von $a$, wo sie verschiedene Werte annehmen. Dann existiert

$$c = \inf\{x \in I \mid x > a,\ y(x) \neq z(x)\}.$$

Für $a \leq x < c$ gilt $y(x) = z(x)$, und wegen ihrer Stetigkeit haben $y$ und $z$ auch an der Stelle $c$ den selben Wert, sagen wir $d$. Nach dem unter (i) Bewiesenen gibt es $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass höchstens eine Lösung

$$(c - \delta, c + \delta) \to [d - \varepsilon, d + \varepsilon]$$

existiert. Wegen der Stetigkeit von $y$ und $z$ können wir durch eventuelle Verkleinerung von $\delta$ erreichen, dass auch $y$ und $z$ das Intervall $(c - \delta, c + \delta)$ in $(d - \varepsilon, d + \varepsilon)$ abbilden, also stimmen sie auf $(c - \delta, c + \delta)$ überein. Dann ist aber $c + \delta$ eine untere Schranke der Stellen rechts von $a$, an denen sich $y$ und $z$ unterscheiden, und das widerspricht der Definition von $c$. Ähnlich beweist man, dass $y$ und $z$ links von $a$ keine verschiedenen Werte annehmen können. □

Der Satz gilt auch für den Fall, dass die gesuchte Funktion $y$ Werte in $\mathbb{R}^n$ annimmt. Natürlich muss $f$ dann auf einer offenen Teilmenge $U$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ definiert sein und Werte in $\mathbb{R}^n$ annehmen, und auch der Anfangswert $b$ ist ein Element von $\mathbb{R}^n$. Die Differentialgleichung lässt sich dann ausführlich als System von Differentialgleichungen

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

schreiben. Der Beweis des Satzes überträgt sich wortwörtlich, da wir im Abschnitt 12 bereits Integrale von Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n$ eingeführt haben.

Eine Differentialgleichung der Ordnung $n$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

lässt sich auf ein System von $n$ Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen:

$$\begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ \dots \\ y_{n-1}' = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}). \end{cases}$$

Somit gilt der Satz sinngemäß auch für Differentialgleichungen $n$ter Ordnung, wenn man die Anfangswerte $y(a)$, $y'(a)$, ..., $y^{(n-1)}(a)$ vorgibt.

Auch dies lässt sich wiederum auf Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^m$ verallgemeinern, indem man die Funktion $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ mit Werten in $(\mathbb{R}^m)^n = \mathbb{R}^{mn}$ betrachtet. Damit ist auch der Fall der Newtonschen Bewegungsgleichungen (3) erfasst. Gibt man also die Anfangswerte von Ort und Geschwindigkeit vor, so existiert nach dem Satz höchstens eine Lösung, man kennt aber im Allgemeinen nicht das größtmögliche Zeitintervall, auf dem eine Lösung existiert. Bis heute ist z. B. ungeklärt, für welche Anfangsbedingungen sich drei Massenpunkte unter der gegenseitigen Anziehung für alle Zeiten ohne Kollision bewegen können (Dreikörperproblem).

# 19 Die Keplerschen Gesetze

Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes der Masse $m$ im Gravitationsfeld eines feststehenden Massenpunktes der Masse $M$. Dabei nehmen wir von vornherein an, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt, in der wir ein Cartesisches Korodinatensystem so wählen, dass sich der feststehende Massenpunkt im Koordinatenursprung befindet. Wir haben bereits am Ende von Abschnitt 14 gefunden, dass die Newtonschen Bewegungsgleichungen dann folgende Form annehmen:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -k\,\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ \ddot{y} = -k\,\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \end{cases}$$

wobei wir $\gamma M = k$ abkürzen. Im Ursprung ist die rechte Seite nicht definiert.

Nun gehen wir zu Polarkoordinaten $r$ und $\varphi$ über. Die Cartesischen Koordinaten drücken sich wie folgt durch die Polarkoordinaten aus:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}$$

Eigentlich sind $r$ und $\varphi$ genau wie $x$ und $y$ Funktionen der Zeit $t$. Bilden wir die ersten Ableitungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi, \\ \ddot{y} &= \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Bewegungsgleichungen ein, so erhalten wir

$$\begin{cases} (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\varphi = -k\,\dfrac{\cos\varphi}{r^2}, \\ (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\sin\varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\cos\varphi = -k\,\dfrac{\sin\varphi}{r^2}. \end{cases}$$

Wir multiplizieren jeweils eine der beiden Gleichungen mit $\cos\varphi$ und die andere mit $\sin\varphi$ und bilden die Summe bzw. die Differenz, so dass sich einer der beiden Summanden auf der linken Seite wegkürzt. Dabei entsteht das neue Gleichungssystem

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\dfrac{k}{r^2}, \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Wir betrachten die Funktion der Zeit

$$l = x\dot{y} - \dot{x}y.$$

Die Größe $L = ml$ nennt man den Drehimpuls des bewegten Massenpunktes bezüglich des Koordinatenursprungs. Drücken wir $l$ durch Polarkoordinaten aus, so erhalten wir nach Einsetzen und Kürzen

$$l = r^2\dot{\varphi},$$

und $\dot{\varphi}$ ist die Winkelgeschwindigkeit. Für unsere Bewegung im Gravitationsfeld ergibt sich

$$\dot{l} = 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0$$

nach der zweiten Gleichung unseres Systems. Somit hängt $l$ nicht von $t$ ab (Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses). Ist $l = 0$, so ist $\varphi$ konstant, und der bewegliche Massenpunkt befindet sich im geradlinigen Fall auf den Ursprung hin (vgl. Aufgabe 50).

Im Folgenden sei $l \neq 0$, dann ist die Funktion $\varphi$ wegen $r > 0$ immer monoton, d. h. der bewegliche Massenpunkt umrundet den feststehenden immer in der selben Richtung. Man kann $r$ dann auch als Funktion von $\varphi$ auffassen. Lösen wir die Formel für $l$ nach $\dot{\varphi}$ auf und setzen dies in die erste Gleichung unseres Systems ein, so erhalten wir

$$\ddot{r} = \frac{l^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, in der nur noch eine gesuchte Funktion $r$ vorkommt. Wir können sie auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen. Multiplizieren wir nämlich beide Seiten mit $2\dot{r}$, so ergibt sich

$$2\ddot{r}\dot{r} = 2l^2\frac{\dot{r}}{r^3} - 2k\frac{\dot{r}}{r^2}.$$

Integrieren wir beide Seiten, so erhalten wir nach der Substitutionsregel

$$\dot{r}^2 = -\frac{l^2}{r^2} + \frac{2k}{r} + C$$

mit einer Konstanten $C$. Diese Konstante ist nicht völlig beliebig. Durch quadratische Ergänzung finden wir

$$\dot{r}^2 = -\left(\frac{l}{r} - \frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{k}{l}\right)^2 + C.$$

Die Summe der letzten beiden Terme muss nichtnegativ sein, damit überhaupt eine Lösung existiert, also können wir schreiben

$$\dot{r}^2 = h^2 - \left(\frac{l}{r} - \frac{k}{l}\right)^2$$

mit einer Konstanten $h \geq 0$.

Ist $h = 0$, so ergibt sich $\dot{r} = 0$ und $\frac{l}{r} = \frac{k}{l}$. In diesem Fall erfolgt die Bewegung auf einer Kreislinie. Von nun an sei $h > 0$. Dann müssen die Werte von $r$ in dem Intervall liegen, auf dem die rechte Seite der Formel für $\dot{r}^2$ nichtnegativ ist. Solange $r$ im Inneren des Intervalls liegt, ist $\dot{r} \neq 0$, also $r$ monoton.

Leider ist die vorliegende Differentialgleichung nicht in elementaren Funktionen lösbar. Auf einem Monotonie-Intervall können wir aber auch $\varphi$ als Funktion von $r$ betrachten. Da $r$ wiederum von $t$ abhängt, gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{dr}{dt},$$

also

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}.$$

Setzen wir die gefundenen Formeln ein, so ergibt sich

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{l}{r^2 \sqrt{h^2 - \left(\frac{l}{r} - \frac{k}{l}\right)^2}}.$$

Hieraus können wir endlich $\varphi$ als Funktion von $r$ gewinnen, indem wir die rechte Seite integrieren. Die Substitution $u = \frac{l}{r} - \frac{k}{l}$ ergibt

$$\varphi = \mp \int \frac{du}{\sqrt{h^2 - u^2}} = \pm \arccos \frac{u}{h} + \varphi_0 = \pm \arccos \frac{1}{h}\left(\frac{l}{r} - \frac{k}{l}\right) + \varphi_0$$

mit einer beliebigen Konstanten $\varphi_0$. Wir bringen diese auf die linke Seite und wenden die Cosinusfunktion an:

$$h \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{l}{r} - \frac{k}{l}.$$

Offenbar ist $\varphi_0$ der Winkel, bei dem $r$ minimal wird. Wir können das Koordinatensystem so wählen, dass die $x$-Achse in diese Richtung zeigt, so dass $\varphi_0 = 0$. Schließlich können wir nach $r$ auflösen:

$$r = \frac{l^2}{k + hl\cos\varphi}.$$

Dies können wir als

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\varphi}$$

mit

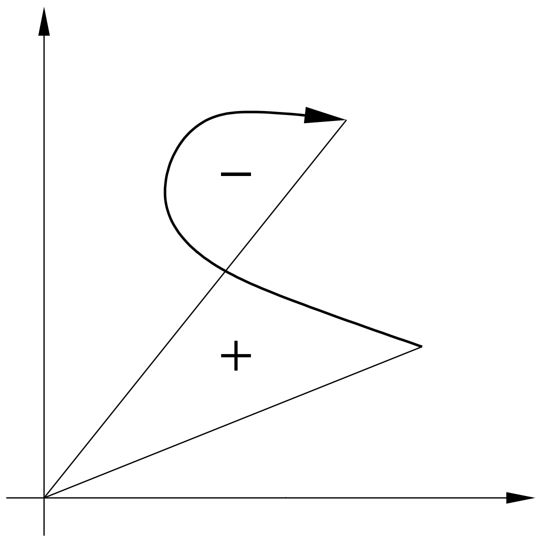
$$e = \frac{hl}{k}, \qquad p = \frac{l}{h}$$

schreiben. Nach Aufgabe 33 ist die Bahnkurve also eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel (erstes Keplersches Gesetz).

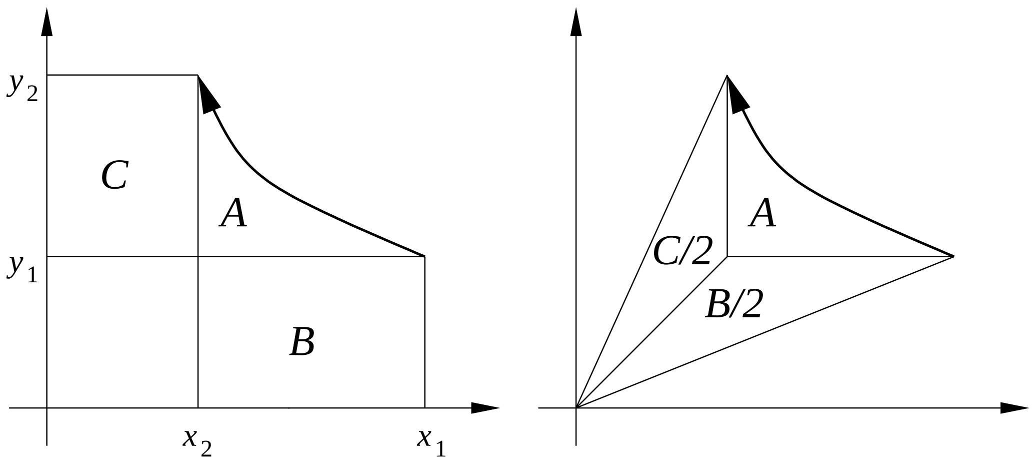
**Satz 31** *Es seien $x$ und $y$ stetig differenzierbare und stückweise monotone Funktionen von $t$. Dann überstreicht die Verbindungsstrecke von $(x, y)$ mit dem Ursprung in einem Zeitintervall $[t_1, t_2]$ die Fläche*

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt,$$

*wobei überstrichene Flächen positiv oder negativ gezählt werden je nach dem Drehsinn der Verbindungsstrecke.*




*Beweis.* Angenommen, $x$ ist auf dem gegebenen Intervall monoton fallend und $y$ monoton wachsend. Wir bezeichnen gewisse Teilflächen wie im linken Bild.




Nach der Substitutionsregel ist, wenn wir $y$ als Funktion von $x$ betrachten,

$$-\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}y\,dt = -\int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx = \int_{x_2}^{x_1} y(x)\,dx = A + B.$$

Analog ist, wenn wir $x$ als Funktion von $y$ betrachten,

$$\int_{t_1}^{t_2} x\dot{y}\,dt = \int_{y_1}^{y_2} x(y)\,dy = A + C.$$

Die Formel im Satz berechnet

$$\frac{A+B}{2} + \frac{A+C}{2} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}.$$

Wenn wir die waagerechte bzw. senkrechte Trennlinie als Grundlinie des jeweiligen Dreiecks im rechten Bild betrachten, so ergibt sich seine Fläche zu $\frac{B}{2}$ bzw. $\frac{C}{2}$.

Der Beweis für andere Monotonieeigenschaften ist analog. □

In unserem Fall ist die in der Zeit von $t_1$ bis $t_2$ überstrichene Fläche gleich

$$\frac{l}{2}(t_2 - t_1)$$

mit einer Konstanten $l$ (zweites Keplersches Gesetz).

Den Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen $a$ und $b$ kann man durch Integration der Funktionen

$$y(x) = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

bestimmen und erhält den Wert $\pi ab$. (Dies lässt sich auch so erklären, dass der Flächeninhalt $\pi$ des Einheitskreises bei der Streckung in $x$-Richtung mit dem Faktor $a$ und bei der Streckung in $y$-Richtung mit dem Faktor $b$ multipliziert wurde.) Aus dem zweiten Keplerschen Gesetz ergibt sich also im Fall einer Ellipsenbahn

$$\pi ab = \frac{lT}{2},$$

wobei $T$ die Umlaufzeit bezeichnet. Ist $a$ die große Halbachse, so stellt sich heraus, dass $a^3/T^2$ nicht von der Masse des umlaufenden Massenpunktes, seiner Anfangslage sowie seiner Anfangsgeschwindigkeit abhängt (drittes Keplersches Gesetz). Der genaue Wert ist in Aufgabe 49 zu bestimmen.

# 20 Elliptische Funktionen

Wir halten eine Zahl $0 \leq k < 1$ fest und betrachten das elliptische Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

welches für $-1 < x < 1$ definiert ist. Durch die Substitution $x = \sin\varphi$ wird es zu

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Zur Abkürzung schreiben wir

$$\Delta(\varphi) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Das obige unbestimmte Integral ist bis auf eine Konstante gleich der Funktion

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Sie ist für alle $\alpha$ definiert, stetig differenzierbar und streng monoton wachsend. Mit geeigneten Substitutionen und Satz 15 angewendet auf die Zahlen $0$, $\pi$, $\pi+\alpha$ bzw. $0$, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$ findet man

$$F(-\alpha) = -F(\alpha), \qquad F(\pi+\alpha) = F(\pi) + F(\alpha), \qquad F(\pi) = 2K,$$

wobei $K = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Hieraus folgt $F(\alpha + n\pi) = F(\alpha) + 2nK$ für alle ganzen Zahlen $n$.

Im Spezialfall $k = 0$ ist natürlich $F(\alpha) = \alpha$. Für beliebiges $0 \leq k < 1$ gilt folgende Verallgemeinerung des Additionstheorems der Cosinusfunktion.

**Satz 32** *Für beliebige reelle Zahlen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ mit der Eigenschaft*

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) = 0 \tag{11}$$

*gilt*

$$\cos\alpha\cos\beta - \Delta(\gamma)\sin\alpha\sin\beta = \cos\gamma,$$
$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \Delta(\alpha)\Delta(\beta)\sin\alpha\sin\beta}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Der Satz gilt offensichtlich in dem Spezialfall, dass eine der drei Zahlen ein Vielfaches von $\pi$ ist (Übungsaufgabe).

*Beweis.* Angenommen, $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ sind derart, dass das erste Additionstheorem gilt, welches wir in der Form

$$\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma = \Delta(\gamma)\sin\alpha\sin\beta \tag{12}$$

schreiben. Nun quadrieren wir beide Seiten:

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma = (1-k^2\sin^2\gamma)\sin^2\alpha\sin^2\beta.$$

Beim Ausmultiplizieren entsteht auf der rechten Seite u. a. der Term

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta = (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

Der letzte Summand kürzt sich weg, und wir erhalten

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma = 1.$$

Dieser Ausdruck ist symmetrisch in $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$. Führen wir die Umformungen in umgekehrter Reihenfolge mit vertauschten Rollen der Variablen durch, so erhalten wir

$$\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha = \pm\Delta(\alpha)\sin\beta\sin\gamma, \tag{13}$$
$$\cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta = \pm\Delta(\beta)\sin\alpha\sin\gamma. \tag{14}$$

Wir können das quadrierte Additionstheorem auch als quadratische Gleichung mit der Unbekannten $x = \cos\gamma$ lesen:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+x^2-2x\cos\alpha\cos\beta+k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta(1-x^2) = 1,$$

also nach Zusammenfassen und Umformung des konstanten Terms

$$(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)x^2-2x\cos\alpha\cos\beta+(1+k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha-\sin^2\beta) = 0.$$

Die Diskriminante ist

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha\cos^2\beta-(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)(1+k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha-\sin^2\beta)\\
&=\cos^2\alpha\cos^2\beta-(1-k^4\sin^4\alpha\sin^4\beta)+(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\\
&=(1-k^2\sin^2\alpha)(1-k^2\sin^2\beta)\sin^2\alpha\sin^2\beta.
\end{aligned}$$

Aus der Lösungsformel folgt nun

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha\cos\beta\pm\Delta(\alpha)\Delta(\beta)\sin\alpha\sin\beta}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}. \tag{15}$$

Bis auf das unbestimmte Vorzeichen ist also das zweite Additionstheorem eine Folgerung des ersten Additionstheorems (12).

Um (12) zu beweisen, können wir annehmen, dass $\gamma$ kein Vielfaches von $\pi$ ist, und halten dieses fest. Die Gleichung (11) beschreibt dann eine Kurve in der $\alpha$-$\beta$-Ebene. Wir wollen zeigen, dass sie in der Lösungsmenge der Gleichung (12) enthalten ist. Auf jeden Fall gehören $\alpha = n\pi$ und $\beta = -\gamma - n\pi$) zur Lösungsmenge. Wir betrachten eine stetig differenzierbare streng monotone Funktion $\alpha(t)$ mit $\alpha(0) = n\pi$. Es gibt ein offenes Intervall $I$, in dem $\sin\alpha(t)$ die einzige Nullstelle $t = 0$ hat. Die quadrierte Form des Additionstheorems kann man auch als quadratische Gleichung für $y = \cos\beta$ lesen. Diese hat auf $I$ eine stetige Lösung $y(t)$ mit $y(0) = \cos(-\gamma - n\pi)$, denn die Diskriminante $(\Delta(\alpha)\Delta(\gamma)\sin\alpha\sin\gamma)^2$ ist nichtnegativ. Für $t \neq 0$ ist sie nicht Null, und $y(t)$ hängt differenzierbar von $t$ ab. Auf einem notfalls verkleinerten Intervall $I$ gilt $y(t) \in (-1, 1)$, und die Gleichung (12) hat eine stetige Lösung $\beta(t)$ mit $\beta(0) = -\gamma - n\pi$, die für $t \neq 0$ differenzierbar ist. Setzen wir $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ in (13) ein, so gilt das obere Vorzeichen für $t = 0$, also nach Stetigkeit für alle $t \in I$. Bilden wir die Ableitungen beider Seiten von (12) an der Stelle $t = 0$, so erhalten wir

$$-\dot\beta(0) = \Delta(\gamma)\dot\alpha(0).$$

Wir dividieren beide Seiten in (12) durch $\sin\alpha(t)\sin\beta(t)$, was für $t \neq 0$ möglich ist. Da wir auf der rechten Seite Null erhalten, muss auch der Zähler, der sich auf der linken Seite in der Quotientenregel ergibt, gleich Null sein, d. h.

$$\begin{aligned}(-\dot\alpha\sin\alpha\cos\beta - \dot\beta\cos\alpha\sin\beta)\sin\alpha\sin\beta&\\ - (\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)(\dot\alpha\cos\alpha\sin\beta + \dot\beta\sin\alpha\cos\beta) &= 0.\end{aligned}$$

Dies lässt sich zusammenfassen zu

$$\dot\alpha(\cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta)\sin\beta + \dot\beta(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha)\sin\alpha = 0.$$

Hier setzen wir die Gleichungen (13) und (14) ein, dividieren durch

$$\Delta(\alpha)\Delta(\beta)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

und erhalten

$$\frac{\dot\alpha}{\Delta(\alpha)} \pm \frac{\dot\beta}{\Delta(\beta)} = 0.$$

Da $\dot\alpha$ und $\dot\beta$ an der Stelle $t = 0$ unterschiedliche Vorzeichen haben, gilt auch hier (und in (14)) das obere Vorzeichen. Es folgt, dass die Summe $F(\alpha)+F(\beta)$ konstant ist, und da sie für $t = 0$ den Wert $-F(\gamma)$ hat, gilt für alle $t \in I$

$$F(\alpha(t)) + F(\beta(t)) + F(\gamma) = 0.$$

Wegen der Monotonie von $F$ ist $\beta(t)$ die einzige Lösung der Gleichung (11) für $\alpha = \alpha(t)$. Das Additionstheorem (12) gilt also für alle Punkte der Kurve (11) mit $\alpha = \alpha(t)$, $t \in I$. Wir können z. B. $\alpha(t) = n\pi + t$ setzen. Dann ist das größtmögliche Intervall $I$ dadurch festgelegt, dass an seinen Enden $\alpha$ oder $\beta$ einen Wert annimt, der ein Vielfaches von $\pi$ ist.

Die $\alpha$-$\beta$-Ebene ist in Quadrate der Seitenlänge $\pi$ zerlegt, und das Additionstheorem gilt trivialerweise auf den Schnittpunkten der Kurve (11) mit den Gitterlinien. Ausgehend von einem Schnittpunkt mit einer senkrechten Gitterlinie haben wir die Gültigkeit für die Abschnitte bis zu den nächsten Schnittpunkten gezeigt. Dasselbe Argument ist auch mit vertauschten Rollen von $\alpha$ und $\beta$ anwendbar, also ausgehend von einem Schnittpunkt mit einer waagerechten Gitterlinie. Damit erreicht man alle Punkte der Kurve.

Es bleibt das Vorzeichen in (15) zu bestimmen. Ist $\gamma$ ein Vielfaches von $\pi$, so ergibt eine Rechnung das Vorzeichen $-$, und dies gilt für alle $\gamma$ nach Stetigkeit. □

**Folgerung 1** *Unter den Voraussetzungen von Satz 32 gilt*

$$\begin{aligned}\sin\gamma &= -\frac{\Delta(\beta)\sin\alpha\cos\beta + \Delta(\alpha)\cos\alpha\sin\beta}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta},\\ \Delta(\gamma) &= \frac{\Delta(\alpha)\Delta(\beta) - k^2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}.\end{aligned}$$

Um dies zu zeigen, setzen wir das Additionstheorem für $\cos\gamma$ in (14) ein. Wie wir im Beweis feststellten, gilt dort das obere Vorzeichen. (Gleichung (14) folgt auch aus der Aussage des Satzes, denn seine Voraussetzung ist symmetrisch bezüglich $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$.) Wir erhalten

$$\Delta(\beta)\sin\alpha\sin\gamma = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \Delta(\alpha)\Delta(\beta)\sin\alpha\sin\beta}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}\cos\alpha - \cos\beta.$$

Bringen wir die gesamte rechte Seite auf den Nenner $1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta$, so erhalten wir im Zähler

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha\cos\beta - \Delta(\alpha)\Delta(\beta)\sin\alpha\sin\beta)\cos\alpha - (1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)\cos\beta\\ &\quad= (\cos^2\alpha - 1 + k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)\cos\beta - \Delta(\alpha)\Delta(\beta)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\\ &\qquad\qquad= -\Delta(\beta)^2\sin^2\alpha\cos\beta - \Delta(\alpha)\Delta(\beta)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Dividieren wir beide Seiten durch $\Delta(\beta)\sin\alpha$, so erhalten wir das Additionstheorem für $\sin\gamma$ außer wenn $\alpha$ ein Vielfaches von $\pi$ ist, aber in diesem Fall kann man es explizit nachprüfen. Das Additionstheorem für $\Delta(\gamma)$ zeigt man analog (Übungsaufgabe).

**Definition 21** *Die Umkehrfunktion von $F$ nennt man Amplitude, also*

$$u = F(\alpha) \qquad \textit{genau dann, wenn} \qquad \alpha = \operatorname{am} u.$$

*Die Funktionen*

$$\operatorname{sn} u = \sin \operatorname{am} u, \qquad \operatorname{cn} u = \cos \operatorname{am} u, \qquad \operatorname{dn} u = \Delta(\operatorname{am} u)$$

*nennt man die Jacobischen elliptischen Funktionen.*

Die Abkürzungen stehen für die lateinischen Bezeichnungen *amplitudo, sinus amplitudinis, cosinus amplitudinis* und *delta amplitudinis.* (Der Genitiv von *amplitudo* lautet *amplitudinis.*) Man sollte eigentlich $F_k(\alpha)$, $\operatorname{am}_k u$, $\operatorname{sn}_k u$, $\operatorname{cn}_k u$ und $\operatorname{dn}_k u$ schreiben, um die Abhängigkeit vom Modul $k$ auszudrücken. („Modul“ bedeutet hier soviel wie „Parameter“.) Natürlich gilt $\operatorname{am}_0 u = u$, $\operatorname{sn}_0 u = \sin u$, $\operatorname{cn}_0 u = \cos u$ und $\operatorname{dn}_0 u = 1$. Man kann $F_k$ auch für $k > 1$ als Funktion auf dem Intervall $[-\arcsin \frac{1}{k}, \arcsin \frac{1}{k}]$ definieren und $\operatorname{am}_k$ zu einer periodischen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen, aber dies werden wir hier nicht näher behandeln.

Die eingangs vorgenommene Substitution $x = \sin \varphi$ für $|x| < 1$, also $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, zeigt

$$u = \int_0^{\operatorname{am} u} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int_0^{\operatorname{sn} u} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

für $|u| < K$. Die Funktion sn ist also auf einem Intervall die Umkehrfunktion eines elliptischen Integrals. Es ist offensichtlich, dass

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \qquad k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1.$$

**Satz 33** *Die Ableitungen der Jacobischen elliptischen Funktionen sind*

$$(\operatorname{sn} u)' = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \qquad (\operatorname{cn} u)' = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \qquad (\operatorname{dn} u)' = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

*Es gelten die Aditionstheoreme*

$$\begin{aligned}
\operatorname{cn}(u+v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},\\
\operatorname{sn}(u+v) &= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},\\
\operatorname{dn}(u+v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.
\end{aligned}$$

*Beweis.* Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}(\sin \operatorname{am} u)' &= \cos \operatorname{am} u\,(\operatorname{am} u)',\\ (\cos \operatorname{am} u)' &= -\sin \operatorname{am} u\,(\operatorname{am} u)',\\ \Delta'(\operatorname{am} u) &= \frac{-k^2 \sin \operatorname{am} u\, \cos \operatorname{am} u\,(\operatorname{am} u)'}{\Delta(\operatorname{am} u)},\end{aligned}$$

und mit der Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion erhalten wir

$$(\operatorname{am} u)' = \frac{1}{F'(\operatorname{am} u)} = \Delta(\operatorname{am} u).$$

Hieraus folgen die behaupteten Formeln für die Ableitungen.

Setzt man $\alpha = \operatorname{am} u$, $\beta = \operatorname{am} v$ und $\gamma = -\operatorname{am}(u+v)$, so gilt

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) = F(\alpha) + F(\beta) - F(-\gamma) = u + v - (u+v) = 0,$$

und die Additionstheoreme folgen aus Satz 32 und seiner Folgerung. □

**Folgerung 2** *Ist $K = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $k' = \sqrt{1-k^2}$, so gilt*

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u+K) &= \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, & \operatorname{cn}(u+K) &= -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, & \operatorname{dn}(u+K) &= \frac{k'}{\operatorname{dn} u},\\ \operatorname{sn}(u+2K) &= -\operatorname{sn} u, & \operatorname{cn}(u+2K) &= -\operatorname{cn} u, & \operatorname{dn}(u+2K) &= \operatorname{dn} u.\end{aligned}$$

Dies folgt wegen $\operatorname{am} K = \frac{\pi}{2}$ und $\operatorname{am}(u+2K) = \operatorname{am} u + \pi$ aus den Additionstheoremen.

# 21 Das mathematische Pendel

Ein mathematisches Pendel ist ein Massenpunkt, der sich unter der Wirkung eines homogenen Gravitationsfeldes reibungsfrei auf einer Kreislinie bewegt.

Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper, der sich unter der Wirkung eines homogenen Gravitationsfeldes reibungsfrei um eine feste Achse dreht. Zu jedem physikalischen Pendel gibt es ein mathematisches Pendel mit dem selben Trägheitsmoment und somit identischen Bewegungen.

Da es nur auf die Projektion des Gewichtsvektors auf die Kreisebene ankommt, können wir annehmen, dass er in dieser Ebene liegt. Den Radius des Kreises bezeichnet man üblicherweise mit $l$ und denkt an eine kleine Kugel, die an einem Faden der Länge $l$ hängt (oder besser an einem leichten Stab, weil ein Faden nicht immer straff sein muss). Bezeichnet man den Winkel, den der Massenpunkt beginnend von der unteren Gleichgewichtslage in positivem Drehsinn zurückgelegt hat, mit $2\varphi$, so ist der zurückgelegte Weg gleich $2l\varphi$ und die Beschleunigung dem Betrage nach gleich $2l\ddot{\varphi}$. Die Tangentialkomponente der Gewichtskraft ist gleich $-mg\sin 2\varphi$, und die Newtonsche Bewegungsgleichung wird zu

$$2ml\ddot{\varphi} = -mg\sin 2\varphi.$$

Offensichtlich kürzt sich die Masse $m$ heraus.

Für kleine Auslenkungen $\varphi$ wird oft $\sin 2\varphi$ durch die Näherung $2\varphi$ ersetzt, und man erhält

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Aus Satz 29 folgt nun, dass das Pendel näherungsweise harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ausführt. Aus der Relation $\omega T = 2\pi$ erhält man die Periode

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

die in dieser Näherung nicht von der Auslenkung abhängt.

Nun betrachten wir die exakte Bewegungsgleichung, die für beliebige Auslenkungen gilt, und multiplizieren beide Seiten mit $\dot{\varphi}$:

$$2\ddot{\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{g}{l}\dot{\varphi}\sin 2\varphi.$$

Wir integrieren beide Seiten mit Hilfe der Substitutionsregel und erhalten

$$\dot{\varphi}^2 = -\frac{g}{l}\sin^2\varphi + C$$

mit einer Integrationskonstanten $C$. (Wegen $\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$ kann man das Ergebnis auch anders schreiben.) Die rechte Seite muss nichtnegativ sein, und wie wir sehen werden, nimmt jede Lösung zu irgendeinem Zeitpunkt den Wert $\varphi = 0$ an, also können wir $C = h^2$ schreiben, wobei $h \geq 0$. Für $h = 0$ ist $\sin\varphi(t) = 0$ für alle $t$, das Pendel also in der unteren Gleichgewichtslage.

Nun sei $h > 0$. Wir lösen nach $\dot{\varphi}$ auf:

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{h^2 - \frac{g}{l}\sin^2\varphi}.$$

Solange die Wurzel nicht Null wird, ist $\varphi$ streng monoton. Auf einem Monotonieintervall können wir $t$ als Funktion von $\varphi$ betrachten, und

$$\frac{dt}{d\varphi} = \pm\frac{1}{\sqrt{h^2 - \frac{g}{l}\sin^2\varphi}}.$$

Durch Integration finden wir

$$t = \pm\frac{1}{h}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wobei $k = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{g}{l}}$. Ist $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) > 0$, so folgt

$$t = \frac{1}{h}F_k(\varphi),$$

also

$$\varphi(t) = \mathrm{am}_k\, ht.$$

Bezeichnen wir den Abstand von der unteren Gleichgewichtslage mit $2x$, so folgt

$$x(t) = \sin\varphi(t) = \mathrm{sn}_k\, ht.$$

Ist $k < 1$, so führt das Pendel eine ungleichförmige Drehbewegung durch (es überschlägt sich). Für $k > 1$ (was wir im vorigen Abschnitt nur am Rande behandelt haben) kehrt das Pendel seine Bewegungsrichtung immer wieder um.

# 22 Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen

Zunächst betrachten wir Funktionen einer Variablen. Eine Funktion $f$ auf einem Intervall $I$ ist an der Stelle $a$ differenzierbar, wenn der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

für $x \to a$ einen Grenzwert $b$ besitzt, und diesen bezeichnet man dann als Ableitung $f'(a)$. Schreiben wir

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b + r(x),$$

so ist der Restterm $r(x)$ zunächst für $x = a$ nicht definiert, aber wenn wir $r(a) = 0$ setzen, so wird $r$ an der Stelle $a$ stetig. Lösen wir die Gleichung nach $f(x)$ auf, so erhalten wir

$$f(x) = f(a) + b(x - a) + r(x)(x - a) = l(x) + r(x)(x - a), \tag{16}$$

wobei $l$ eine lineare Funktion ist, welche die Funktion $f$ an der Stelle $a$ sehr gut approximiert, denn wir haben $l(a) = f(a)$ und $l'(a) = f'(a)$. Der Graph von $l$ ist dann die Tangente an den Graphen von $f$ im Punkt $(a, f(a))$. Man könnte die Differenzierbarkeit von $f$ an der Stelle $a$ auch so definieren, dass man die Gültigkeit der Gleichung (16) mit einer geeigneten linearen Funktion $l$ und einer geeigneten Funktion $r$ verlangt, wobei $r$ an der Stelle $a$ verschwindet und stetig ist. Statt $r(x)(x-a)$ könnte man ebensogut $r(x)|x-a|$ schreiben, denn wenn eine Funktion gegen Null konvergiert, so tut es auch ihr produkt mit einer beschränkten Funktion (hier $\operatorname{sgn}(x - a)$).

Nun betrachten wir eine Funktion $f$, die auf einer offenen Teilmenge $U$ von $\mathbb{R}^2$ definiert ist, und einen Punkt $(a, b) \in U$. Wir kennen bereits den Begriff der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Dies ist die Ableitung von $f(x, b)$ an der Stelle $x = a$ bzw. von $f(a, y)$ an der Stelle $y = b$. In der Wirklichkeit ist aber kein Koordinatensystem vorgegeben. Wählt man ein anderes Koordinatensystem, so wird dessen erste Koordinatenachse in Richtung eines Vektors $(u, v)$ zeigen, und die achsenparallele Gerade durch $(a, b)$ wird parametrisiert durch

$$(a, b) + t(u, v) = (a + tu, b + tv).$$

Ein sinnvoller Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion von zwei Variablen an der Stelle $(a, b)$ sollte also auch die Existenz der Ableitung von

$$f(a + tu, b + tv) = h(t)$$

an der Stelle $t = 0$ einschließen, also

$$\frac{d}{dt} f(a + tu, b + tv)\Big|_{t=0} = h'(0).$$

Dies nennt man dann die Richtungsableitung der Funktion $f$ in der Richtung des Vektors $(u, v)$ an der Stelle $(a, b)$. Aus der Existenz der partiellen Ableitungen folgt aber nicht die Existenz der Richtungsableitungen:
*Beispiel.* Es sei $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. An der Stelle $(0, 0)$ existieren beide partiellen Ableitungen, und beide sind Null, denn $f(x, 0) = 0$ und $f(0, y) = 0$. Der Vektor $(1, 1)$ ist der Richtungsvektor der diagonalen Geraden, parametrisiert durch $(t, t)$, und

$$f(t, t) = \sqrt{t^2} = |t|.$$

Wir sehen, dass die Richtungsableitung in Richtung $(1, 1)$ an der Stelle $(0, 0)$ nicht existiert.

Man kommt also auf die Idee, in einer Definition der Differenzierbarkeit die Existenz aller Richtungsableitungen zu verlangen. In Analogie zum Fall einer Variablen würde man vermuten, dass die Funktion dann durch eine lineare Funktion $l$ approximiert wird in dem Sinne, dass $l$ den selben Wert und die selben Richtungsableitungen wie $f$ hat. Leider ist dies nicht immer richtig. Eine lineare Funktion von zwei Variablen hat die Form

$$l(x, y) = cx + dy + e.$$

Es ergibt sich

$$l(a + tu, b + tv) = l(a, b) + (cu + dv)t + e,$$

und die Richtungsableitung von $l$ in der Richtung $(u, v)$ ist

$$cu + tv.$$

Dies ist eine homogene lineare Funktion von $u$ und $v$.
*Beispiel.* Wir untersuchen die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} & \text{andernfalls} \end{cases}$$

an der Stelle $(0,0)$. Für einen Vektor $(u,v) \neq (0,0)$ erhalten wir

$$f(tu,tv) = \frac{u^3 - 3uv^2}{u^2+v^2} t$$

zunächst für $t \neq 0$, aber dies ist auch für $t = 0$ richtig. Die Richtungsableitung in Richtung $(u,v)$ ist also

$$\frac{u^3 - 3uv^2}{u^2+v^2},$$

und dies ist keine lineare Funktion von $u$ und $v$, also kann es eine linaere Funktion $l$ mit den gewünschten Eigenschaften nicht geben. Den Graphen von $f$ kann man sich besser vorstellen, wenn man zu Polarkoordinaten übergeht:

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi),$$

was auch für $r = 0$ gilt, und nach dem Additionstheorem haben wir

$$\cos 3\varphi = \cos 2\varphi \cos\varphi - \sin 2\varphi \sin\varphi = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\cos\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi,$$

das heißt

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r\cos 3\varphi.$$

Der Graph von $f$ wird also von einer Geraden durch den Korodinatenursprung überstrichen, die sich um die $z$-Achse dreht und bei einem Umlauf dreimal auf- und abwippt.

Die Definition der Richtungsableitung kann man mit Hilfe eines Punktes verstehen, der sich mit wachsendem $t$ entlang einer Geraden bewegt. Der Wert von $f$ in diesem variablen Punkt ist dann eine Funktion der Zeit, und ihre Ableitung ist die Richtungsableitung von $f$ bezüglich des Geschwindigkeitsvektors. Allgemeiner könnte sich ein Punkt entlang einer differenzierbaren Kurve bewegen. Seine Koordinaten sind differenzierbare Funktionen $x(t)$ und $y(t)$, und der Geschwindigkeitsvektor zu einem Zeitpunkt $s$ ist $(u,v) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$. Man würde man erwarten, dass die Ableitung von $f(x(t), y(t))$ als Funktion von $t$ zum Zeitpunkt $s$ gleich der Richtungsableitung von $f$ an der Stelle $(a,b) = (x(s), y(s))$ in Richtung $(u,v)$ ist. Dies wäre eine Art Kettenregel für die Verkettung von $f$ mit der Abbildung $(x,y) : I \to U$. Leider ist dies selbst dann nicht garantiert, wenn es eine lineare Funktion $l$ gibt, die an der Stelle $(a,b)$ den selben Wert und die selben Richtungsableitungen wir $f$ hat.

*Beispiel.* Wir untersuchen die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } y = 0, \\ \frac{x^3}{y} e^{-\frac{x^2}{|y|}} & \text{andernfalls} \end{cases}$$

an der Stelle $(0,0)$. Diese ist übrigens überall stetig. Für einen Vektor $(u,v)$ mit $v \neq 0$ ist

$$f(tu,tv) = \frac{u^3}{v} t^2 e^{-\frac{u^2}{|v|}|t|},$$

was sogar für $t=0$ stimmt, und bilden wir die Ableitung nach $t$ an der Stelle $t=0$, so erhalten wir für die Richtungsableitung den Wert 0. Auch für $v=0$ ergibt sich das selbe Ergebnis. Die Richtungsableitungen hängen also linear von $u$ und $v$ ab. Betrachten wir aber die Bewegung $(x(t),y(t)) = (t,t^2)$ entlang einer Parabel mit dem Geschwindigkeitsvektor $(1,0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$, so haben wir die verkettete Funktion

$$f(t,t^2) = te^{-1}$$

mit der Ableitung $e^{-1}$ zum Zeitpunkt $t=0$, was nicht mit der Richtungsableitung übereinstimmt.

**Definition 22** *Eine Funktion $f$ auf einer offenen Teilmenge $U$ von $\mathbb{R}^2$ heißt diffenzierbar an der Stelle $(a,b)$, wenn es eine lineare Funktion $l$ auf $\mathbb{R}^2$ und eine Funktion $r$ auf $U$ gibt, die an der Stelle $(a,b)$ stetig ist und dort den Wert Null hat, so dass für $(x,y) \in U$ gilt*

$$f(x,y) = l(x,y) + r(x,y)\left|(x,y)-(a,b)\right|.$$

Man beachte, dass

$$\max(|x-a|,|y-b|) \leq |(x,y)-(a,b)| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq |x-a|+|y-b|.$$

Durch Einsetzen finden wir $f(a,b) = l(a,b)$, und jede lineare Funktion mit dieser Eigenschaft hat die Form

$$l(x,y) = f(a,b) + c(x-a) + d(x-b).$$

Nun ist

$$f(x,b) = f(a,b) + c(x-a) + r(x,b)|x-a|,$$

und durch Vergleich mit (16) findet man

$$c = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

und analog

$$d = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Wenn $f$ also differenzierbar ist, so ist die lineare Funktion $l$ (und somit die Funktion $r$) eindeutig bestimmt.

Jede Funktion einer Variablen, die an der Stelle $a$ differenzierbar ist, kann man auch als Funktion von zwei Variablen auffassen, die von der zweiten Variablen nicht abhängt, und als solche ist sie differenzierbar an der Stelle $(a, b)$ für jedes $b \in \mathbb{R}$. Das Gleiche gilt bei Vertauschung der Variablen. Zusammen mit dem folgenden Satz verschafft uns das recht viele differenzierbare Funktionen.

**Satz 34** *Sind die Funktionen $f$ und $g$ differenzierbar an der Stelle $(a, b)$, so gilt das auch für die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$.*

*Beweis.* Wir führen nur den Beweis für das Produkt, da der für die Summe analog, aber einfacher ist. Nach Definition gibt es lineare Funktionen $m$ und $n$ sowie Funktionen $p$ und $q$, die alle an der Stelle $(a, b)$ stetig sind und den Wert Null haben, so dass

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + m(x, y) + p(x, y) \left|(x, y) - (a, b)\right|, \\ g(x, y) &= g(a, b) + n(x, y) + q(x, y) \left|(x, y) - (a, b)\right|. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$f(x, y)g(x, y) = f(a, b)g(a, b) + l(x, y) + r(x, y) \left|(x, y) - (a, b)\right|,$$

wobei

$$l(x, y) = f(a, b)n(x, y) + g(a, b)m(x, y)$$

linear ist und

$$\begin{aligned} r(x, y) = (f(a, b) + m(x, y))q(x, y) + (g(a, b) + n(x, y))p(x, y) \\ + p(x, y)q(x, y) \left|(x, y) - (a, b)\right| + \frac{m(x, y)n(x, y)}{\left|(x, y) - (a, b)\right|}. \end{aligned}$$

Da die lineare Funktion $m$ an der Stelle $(a, b)$ den Wert Null annimmt, ist

$$|m(x, y)| \leq C \left|(x, y) - (a, b)\right|$$

für eine passende Konstante $C$. Analoges gilt für die Funktion $n$, also auch für den letzte Term in dem Ausdruck für $r$. Setzen wir also $r(a, b) = 0$, so ist $r$ stetig an der Stelle $(a, b)$. □

Mit unserer Definition gilt im Unterschied zum dritten Beispiel die Kettenregel im folgenden Sinne.

**Satz 35** *Es sei $f$ auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ definiert und $x$, $y$ Funktionen auf einem Intervall $I$, so dass $(x(t), y(t)) \in U$ für $t \in I$. Sind $x$ und $y$ an der Stelle $s$ differenzierbar und ist $f$ an der Stelle $(a, b) = (x(s), y(s))$ differenzierbar, so ist $f(x(t), y(t))$ als Funktion von $t$ an der Stelle $s$ differenzierbar, und*

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=s} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\dot{x}(s) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\dot{y}(s).$$

*Beweis.* Nach Gleichung (16) gibt es Funktikonen $p$ und $q$ auf $I$, die an der Stelle $s$ stetig sind und den Wert Null haben, so dass

$$\begin{aligned} x(t) &= a + \dot{x}(s)(t-s) + p(t)|t-s|, \\ y(t) &= b + \dot{y}(s)(t-s) + q(t)|t-s|. \end{aligned}$$

Außerdem gibt es eine Funktion $r$ wie in der Definition der Differenzierbarkeit, so dass

$$f(x,y) = f(a,b) + c(x-a) + d(y-b) + r(x,y)\,|(x,y)-(a,b)|\,,$$

wobei

$$c = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \qquad d = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f(x(t),y(t)) = f(a,b) &+ (c\dot{x}(s) + d\dot{y}(s))(t-s) \\ &+ cp(t) + dq(t) + r(x(t),y(t))\,|(x(t),y(t))-(a,b)|\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von $r$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $(x,y) \in U$ mit der Eigenschaft $|x-a| < \delta$ und $|y-b| < \delta$ gilt

$$|r(x,y)| < \varepsilon.$$

Weiter gibt es wegen der Stetigkeit von $x$, $p$, $y$ und $q$ an der Stelle $s$ ein $0 < \gamma < 1$ so dass für alle $t \in I$ mit der Eigenschaft $|t-s| < \gamma$ gilt

$$|x(t)-a| < \delta, \quad |y(t)-b| < \delta, \quad |p(t)| < \varepsilon, \quad |q(t)| < \varepsilon.$$

Nun ist die zweite Zeile in (17) beschränkt durch

$$(|c| + |d| + 2\delta)\varepsilon \le (|c| + |d| + 2)\varepsilon.$$

Diese zweite Zeile definiert somit eine Funktion, die an der Stelle $s$ verschwindet und stetig ist. □

Wenden wir den Satz auf die Funktion $f(a+tu, b+tv)$ an, so folgt:

**Folgerung 3** *Ist die Funktion $f$ von zwei Variablen an der Stelle $(a,b)$ differenzierbar, so ist die Richtungsableitung bezüglich des Vektors $(u,v)$ an dieser Stelle gleich*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)u + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)v.$$

Natürlich kann man die Differenzierbarkeit einer Funktion von beliebig vielen Variablen auf analoge Weise definieren.

**Definition 23** *Ein Punkt im Definitionsbereich einer Funktion von mehreren Variablen heißt stationärer Punkt, wenn die Funktion in diesem Punkt differenzierbar ist und sämtliche Richtungsableitungen gleich Null sind.*

Dafür genügt es natürlich, dass sämtliche partiellen Ableitungen in diesem Punkt gleich Null sind.

Ist eine Funktion $f$ von zwei Variablen an einer Stelle $(a, b)$ differenzierbar und hat dort ein lokales Extremum (d. h. ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum), so ist $(a, b)$ ein stationärer Punkt von $f$, denn für alle Vektoren $(u, v)$ hat $f(a + tu, b + tv)$ als Funktion von $t$ an der Stelle $t = 0$ ein lokales Extremum und somit die Ableitung Null.

# 23 Variationsrechnung

Wir betrachten zunächst ein motivierendes Beispiel. Angenommen, der Benzinverbrauch $L$ je Zeiteinheit hängt von der Geschwindigkeit $v$, der Tageszeit und von den Geländebedingungen ab. Letztere werden durch den Ort bestimmt, bei vorgegebener Reiseroute also durch die bereits zurückgelegte Strecke $x$. Wir haben somit eine Funktion $L(t, x, v)$, und dabei ist $x$ wiederum eine Funktion der Zeit, also $x = f(t)$. Startet man zum Zeitpunkt $t_1$ bei $x_1$ und kommt zum Zeitpunkt $t_2$ bei $x_2$ an, so muss natürlich

$$f(t_1) = x_1, \qquad f(t_2) = x_2 \tag{18}$$

sein, und der Gesamtverbrauch ergibt sich als

$$S(f) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, f(t), \dot{f}(t))\, dt.$$

Durch die Fahrweise kann man die Funktion $f$ beeinflussen. Wie muss man $f$ wählen, damit $S(f)$ minimal wird?

Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $L : U \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion $S$ ist definiert auf der Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (18) und

$$(t, f(t), \dot{f}(t)) \in U \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2].$$

Die Menge solcher Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$.

**Satz 36** *Die Funktion $L$ sei differenzierbar, und ihre partiellen Ableitungen nach $x$ und $v$ seien stetig sowie bezüglich der Variablen $x$ und $v$ Lipschitz-stetig. Besitzt $S$ an der Stelle $f$ ein Extremum, so erfüllt $f$ die Eulersche Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, f(t), \dot{f}(t))\right) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, f(t), \dot{f}(t)).$$

*Insbesondere ist $\frac{\partial L}{\partial v}(t, f(t), \dot{f}(t))$ dann stetig differenzierbar.*

*Beweis.* Es sei $f \in \mathcal{M}$ und $g : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit der Eigenschaft

$$g(t_1) = g(t_2) = 0.$$

Dann ist $f(t_1) + hg(t_1) = y_1$, $f(t_2) + hg(t_2) = y_2$. Wir behaupten, dass für Zahlen $u$ in einer Umgebung der Null gilt $f + ug \in \mathcal{M}$.

Zunächst gibt es wegen der Offenheit von $U$ für jedes $s \in [t_1, t_2]$ ein $\varepsilon > 0$, so dass alle $(t, x, y)$ mit den Eigenschaften

$$|t - s| < \varepsilon, \qquad |x - f(s)| < \varepsilon, \qquad |v - \dot{f}(s)| < \varepsilon$$

zu $U$ gehören. Die stetigen Funktionen $|g|$ und $|\dot{g}|$ sind durch eine Konstante $C$ beschränkt, und wegen der Stetigkeit von $f$ und $\dot{f}$ gibt es ein $0 < \delta \leq \varepsilon$, so dass für $|t - s| < \delta$ gilt $|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\dot{f}(t) - \dot{f}(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für dieselben $t$ und für $|u| < \gamma = \frac{\varepsilon}{2C}$ gilt nun

$$\begin{aligned} |f(t) + ug(t) - f(s)| &\leq |f(t) - f(s)| + |u||g(t)| < \varepsilon, \\ |\dot{f}(t) + u\dot{g}(t) - \dot{f}(s)| &\leq |\dot{f}(t) - \dot{f}(s)| + |u||\dot{g}(t)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Unsere Behauptung gilt also, wenn $|t - s| < \delta$ und $|u| < \gamma$. Nach Satz 37 (s. u.) genügen endlich viele von diesen Intervallen $(s - \delta, s + \delta)$, um $[t_1, t_2]$ zu überdecken. Nehmen wir von den zugehörigen positiven Zahlen $\delta$ die kleinste, so gilt die Behauptung für alle $t \in [t_1, t_2]$ und $|u| < \gamma$.

Die Funktion

$$F(u) = S(f + ug)$$

ist nach Satz 23 an der Stelle 0 differenzierbar, und

$$F'(0) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{du} L(t, f(t) + ug(t), \dot{f}(t) + u\dot{g}(t))\Big|_{u=0} dt.$$

Nach Satz 35 ist

$$F'(0) = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x}(t, f(t), \dot{f}(t))g(t) + \frac{\partial L}{\partial v}(t, f(t), \dot{f}(t))\dot{g}(t) \right) dt.$$

Hat $S$ an der Stelle $f$ ein Extremum, so hat $F$ an der Stelle $u = 0$ ein Extremum, also $F'(0) = 0$. Das folgende Lemma liefert nun die Behauptung. □

**Lemma 3** *Es seien $p$ und $q : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ stetig, und für jede stetig differenzierbare Funktion $g : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ mit $g(t_1) = g(t_2) = 0$ gelte*

$$\int_{t_1}^{t_2} \big(p(t)g(t) + q(t)\dot{g}(t)\big) dt = 0.$$

*Dann ist $q$ stetig differenzierbar und $\dot{q}(t) = p(t)$ für alle $t \in [t_1, t_2]$.*

*Beweis.* Ist $c$ eine beliebige Zahl und

$$P(t) = \int_{t_1}^{t} p(s)\, ds + c,$$

dann ist $\dot{P} = p$. Wir können

$$g(t) = \int_{t_1}^{t} (q(s) - P(s))\, ds$$

setzen, wenn wir $c$ so wählen, dass $g(t_2) = 0$, das heißt

$$c = \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_1}^{t_2} \left( q(t) - \int_{t_1}^{t} p(s)\, ds \right) dt.$$

Dann folgt $\dot{g} = q - P$ und

$$\int_{t_1}^{t_2} |q(t) - P(t)|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} (q(t) - P(t))\dot{g}(t)\, dt.$$

Durch partielle Integration wird dies zu

$$\int_{t_1}^{t_2} q(t)\dot{g}(t)\, dt - P(t)g(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} p(t)g(t)\, dt,$$

und dies ist gleich Null nach Voraussetzung. Mit Satz 17 folgt $q(t) = P(t)$ für alle $t$. □

Der Satz gilt auch für vektorwertige Funktionen $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$.

Wir haben den Ort als Funktion der Zeit als $f(t)$ geschrieben, weil im Beweis noch weitere Funktionen von $t$ auftauchten. In der Physik verwendet man $x$ sowohl als Bezeichnung für diese Funktion als auch als Bezeichnung für eine reelle Zahl als Argument von $L$. Die Eulersche Differentialgleichung erscheint dann in der Form

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v}(t, x, \dot{x}) \right) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x, \dot{x}).$$

Manche Autoren schreiben sogar $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ statt $\frac{\partial L}{\partial v}$.

**Satz 37 (Heine-Borel)** *Wird ein abgeschlossenes Intervall von einer Familie $\mathcal{U}$ offener Intervalle überdeckt, so genügen schon endlich viele Intervalle aus $\mathcal{U}$ zur Überdeckung.*

*Beweis.* Angenommen, das gegebene Intervall $[a_0, b_0]$ kann nicht von endlich vielen der offenen Intervalle aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden. Wie im Beweis von Satz 1 teilen wir $[a_0, b_0]$ in zwei Hälften $[a_0, m_0]$ und $[m_0, b_0]$. Dann lässt sich wenigstens eines der beiden Halbintervalle nicht durch endlich viele Intervalle aus $\mathcal{U}$ überdecken, nennen wir es $[a_1, b_1]$. So fortfahrend erhalten wir eine Schachtelung von Intervallen $[a_k, b_k]$, von denen sich keines von endlich vielen Intervallen aus $\mathcal{U}$ überdecken lässt.

Nach Satz 0 gibt es eine Zahl $c$, die für jedes $k$ in $[a_k, b_k]$ enthalten ist. Nach Voraussetzung gibt es ein offenes Intervall $I \in \mathcal{U}$, so dass $c \in I$. Da $I$ offen ist, gilt $[c - \frac{b_0 - a_0}{2^k}, c + \frac{b_0 - a_0}{2^k}] \subset I$ für ein genügend großes $k$. Wegen $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$ folgt $[a_k, b_k] \subset I$, d. h. $[a_k, b_k]$ lässt sich sogar von einem Intervall aus $\mathcal{U}$ überdecken (Widerspruch). □