Universität Bielefeld WS 2012/13
Prof. W. Hoffmann

Diskrete Mathematik

Übungsaufgaben, Blatt 11 - Abgabe bis 11.1.08

51. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots = F_n,$$

wobei F_n die $n$te Fibonacci-Zahl und $F_0 = F_1 = 1$ ist.

52. Finden Sie geschlossene Formeln für u_n, wenn

$$\begin{array}{rlll} \text{(a)} & u_0 = 1, & u_1 = 0, & u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0, \\ \text{(b)} & u_0 = 1, & u_1 = -1, & u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0, \\ \text{(c)} & u_0 = 2, & u_1 = 2, & u_{n+2} - 2u_{n+1} - 2u_n = 0, \\ \text{(d)} & u_0 = 0, & u_1 = u_2 = 5, & u_{n+3} - 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0. \end{array}$$

Hinweis: Die Lösungen der charakteristischen Gleichung im Fall (d) sind ganzzahlig.

53. Stellen Sie fest, ob es eine Zahl c mit

$$\frac{e^{\sqrt{\ln n}} + n^3}{n + \sqrt{n}} = \Theta(n^c)$$

gibt, und wenn ja, bestimmen Sie sie.

54. Geben Sie die Wachstumsordnung der Folgen an, die folgenden Rekursionen genügen:

(a) $f(n) = 4f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 3n^2$,

(b) $f(n) = 4f(\lceil \frac{n}{3} \rceil) + 2n^2$,

(c) $f(n) = 5f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 4n^2$.

55.* Es sei V der Vektorraum der beiderseits unendlichen Folgen u mit der Eigenschaft

$$a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{k-1} u^{n+k-1} + u_{n+k} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, und es sei $A : V \to V$ gegeben durch $(Au)_n = u_{n+1}$. Zeigen Sie, dass

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1} + x^k$$

das charakteristische Polynom von A ist.