

Diskrete Mathematik

Übungsaufgaben, Blatt 12 - Abgabe bis 18.1.2013

56. Berechnen Sie die ersten vier Glieder der formalen Potenzreihe

$$\frac{4 + x + 3x^2}{2 + x + 5x^2 + x^3}$$

zum Einen in $\mathbb{Q}[[x]]$ und zum Anderen in $\mathbb{Z}_3[[x]]$. (Im zweiten Fall sind die Koeffizienten als Restklassen modulo 3 aufzufassen.)

57. Es sei $A(x)$ die erzeugende Funktion der Folge $a = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$. Zeigen Sie, dass die Folgen der Zahlen

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n, \quad t_n = na_n$$

die erzeugenden Funktionen

$$S(x) = \frac{A(x)}{1-x}, \quad T(x) = xA'(x)$$

haben.

58. Es sei $A(x)$ die erzeugende Funktion der Folge $a = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$. Finden Sie die erzeugenden Funktionen $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ der Folgen, die durch

$$b_n = 3a_n, \quad c_n = a_n + 3, \quad d_n = a_{n+3}$$

gegeben sind.

59. Für eine natürliche Zahl n sei d_n die Zahl der Derangements einer n -elementigen Menge. Beweisen Sie die Formel

$$\frac{e^{-x}}{1-x} = d_0 + \frac{d_1}{1!}x + \frac{d_2}{2!}x^2 + \dots + \frac{d_n}{n!}x^n + \dots$$

mit Hilfe der in Aufgabe 15 gefundenen Rekursionsformel. Leiten Sie daraus die Formel

$$d_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

ab. (Sie kann auch mittels Inklusion/Exklusion bewiesen werden.)

60.* Es sei $f(n, k)$ die Anzahl der k -elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten. Zeigen Sie, dass

$$f(n, k) = f(n - 2, k - 1) + f(n - 1, k).$$

Finden Sie die erzeugende Funktion $F_k(x)$ dieser Folge für festes k und zeigen Sie, dass

$$f(n, k) = \binom{n - k + 1}{k}.$$