Universität Bielefeld WS 2012/13
Prof. W. Hoffmann

Diskrete Mathematik

Erste Klausur

1. (a) In einer Dreierwette beim Pferderennen muss man die ersten drei Pferde in der richtigen Reihenfolge des Zieleinlaufes erraten. Wie viele Tippmöglichkeiten gibt es, wenn elf Pferde am Start sind?

   (b) Bei einem Quiz erhält in jeder der sieben Runden der Gewinner unter den fünf Teilnehmern einen Punkt, ansonsten werden keine Punkte vergeben. Wie viele mögliche Endstände gibt es?

   Geben Sie jeweils an, ob es sich um Kombinationen oder Variationen handelt.

2. Lösen Sie die Kongruenzen.

$$91x \equiv 37 \pmod{437}, \qquad 4y \equiv 7^{2013} \pmod{15}.$$

3. Finden Sie das Kontrollpolynom des zyklischen Codes der Länge 6 mit dem Erzeugerpolynom $g(x) = 1 + x + x^3 + x^4$. Unter der Annahme, dass die empfangenen Wörter

$$111110, \quad 101101, \quad 001011$$

   jeweils höchstens einen Fehler enthalten, korrigieren Sie diesen gegebenenfalls. Wie viele Fehler kann der Code erkennen, wie viele korrigieren?

4. Finden Sie geschlossene Formeln für u_n, wenn

   (a) $u_0 = 0, \quad u_1 = 4, \qquad u_{n+2} - 6u_{n+1} + 13u_n = 0,$

   (b) $u_0 = 0, \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 4, \qquad u_{n+3} + 3u_{n+2} + 3u_{n+1} + u_n = 0.$

Formelsammlung

k aus n Dingen	Variationen	Kombinationen
ohne Wiederholung	$(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$
mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Stirlingzahlen zweiter Art:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

(Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge in k Teile).

Inklusion/Exklusion:

$$\left|\,\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\,\right| = \sum_I (-1)^{|I|}|A_I|, \quad \text{wobei } A_I = \bigcap_{i \in I} A_i \text{ für } I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}.$$

Für t-Designs mit v Varietäten, k Blöcken und Replikationszahl r_t von t-elementigen Teilmengen gilt $(k-s)r_s = (v-s)r_{s+1}$, wenn $s < t$.

Satz von Euler: $\quad a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Hamming-Schranke für t-fehlerkorrigierenden Code der Länge n mit m Zeichen:

$$2^n \geq m\left(1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{t}\right).$$

t-fehlererkennend: $\delta > t$; $\quad$ t-fehlerkorrigierend: $\delta > 2t$.

Die Kontrollmatrix des zyklischen Codes der Länge n mit Kontrollpolynom $h(x) = h_0 + h_1 x + \ldots + h_k x^k$ hat die ersten zwei Zeilen

$$\begin{pmatrix} h_k & \ldots & h_1 & h_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & h_k & \ldots & h_1 & h_0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

und die letzte, $(n-k)$te Zeile

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & h_k & \ldots & h_1 & h_0 \end{pmatrix}.$$

Die durch $a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_{k-1} u_{n+k-1} + u_{n+k} = 0$ rekursiv definierte Folge u_n hat das charakteristische Polynom $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} + x^k$.

Eine Rekursion $\quad f(n) = b^c f\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + gn^d$

mit $b > 1$, $c \geq 0$, $d \geq 0$ und $g > 0$ ist

$$\Theta(n^c), \text{ falls } c > d, \qquad \Theta(n^c \log n), \text{ falls } c = d, \qquad \Theta(n^d), \text{ falls } c < d.$$