Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann WS 2012/13

Diskrete Mathematik

Zweite Klausur

1. Wie viele Zahlen unter 10 000 gibt es, die weder durch 7 noch durch 11 noch durch 13 teilbar sind?

2.

3. Ergänzen Sie die Binärwörter

$$1$$

   durch ein weiteres Wort zu einem linearen Code.
   Finden sie eine Kontrollmatrix.
   Wie viele Fehler kann der Code erkennen, wie viele korrigieren?
   Ist er perfekt?

4. Berechnen Sie die ersten fünf nichtverschwindenden Glieder der formalen Potenzreihe

$$\frac{1-3x+7x^2}{1-x+5x^2}$$

   mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Geben Sie das vollständige Ergebnis an, wenn man die Koeffizienten als Elemente von $\mathbb{Z}_2$ interpretiert.

Formelsammlung

k aus n Dingen	Variationen	Kombinationen
ohne Wiederholung	$(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$
mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Stirlingzahlen zweiter Art:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

(Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge in k Teile).

Inklusion/Exklusion:

$$\left|\,\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\,\right| = \sum_I (-1)^{|I|}|A_I|, \quad \text{wobei } A_I = \bigcap_{i\in I} A_i \ \text{ für } I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}.$$

Für t-Designs mit v Varietäten, k Blöcken und Replikationszahl r_t von t-elementigen Teilmengen gilt $(k-s)r_s = (v-s)r_{s+1}$, wenn $s < t$.

Satz von Euler: $\quad a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m.$

Hamming-Schranke für t-fehlerkorrigierenden Code der Länge n mit m Zeichen:

$$2^n \geq m\left(1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{t}\right).$$

t-fehlererkennend: $\delta > t$; $\quad$ t-fehlerkorrigierend: $\delta > 2t$.

Die Kontrollmatrix des zyklischen Codes der Länge n mit Kontrollpolynom $h(x) = h_0 + h_1x + \ldots + h_kx^k$ hat die ersten zwei Zeilen

$$\begin{pmatrix} h_k & \ldots & h_1 & h_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & h_k & \ldots & h_1 & h_0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

und die letzte, $(n-k)$te Zeile

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & h_k & \ldots & h_1 & h_0 \end{pmatrix}.$$

Die durch $a_0u_n + a_1u_{n+1} + \ldots + a_{k-1}u_{n+k-1} + u_{n+k} = 0$ rekursiv definierte Folge u_n hat das charakteristische Polynom $a_0 + a_1x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k$.

Eine Rekursion $\quad f(n) = b^c f\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + gn^d$

mit $b > 1$, $c \geq 0$, $d \geq 0$ und $g > 0$ ist

$$\Theta(n^c), \text{ falls } c > d, \qquad \Theta(n^c \log n), \text{ falls } c = d, \qquad \Theta(n^d), \text{ falls } c < d.$$