

Diskrete Mathematik

Musterlösungen zur ersten Klausur

Aufgabe 1.

(a) Da es auf die Reihenfolge der Pferde ankommt und kein Pferd mehrmals in der Liste vorkommen darf, handelt es sich um Variationen ohne Wiederholung von 11 Dingen (den Pferden) zur Klasse 3. Die Anzahl ist

$$(11)_3 = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990.$$

(b) Ordnen wir jeder Runde seinen Gewinner zu, so erhalten wir eine Abbildung. Da es beim Endstand nicht darauf ankommt, in welcher Runde ein Punkt erzielt wurde, handelt es sich um Kombinationen mit Wiederholung von fünf Dingen (Teilnehmern) zur Klasse sieben. Davon gibt es

$$\binom{5+7-1}{7} = \binom{11}{4} = 330.$$

Aufgabe 2.

(a) Der Euklidische Algorithmus liefert

$$437 = 4 \cdot 91 + 73$$

$$91 = 73 + 18$$

$$73 = 4 \cdot 18 + 1$$

also ist der größte gemeinsame Teiler von 437 und 91 gleich 1. Wir können diesen als Linearkombination der gegebenen Zahlen ausdrücken:

$$\begin{aligned} 1 &= 73 - 4 \cdot 18 = 73 - 4 \cdot (91 - 73) = 5 \cdot 73 - 4 \cdot 91 \\ &= 5 \cdot (437 - 4 \cdot 91) - 4 \cdot 91 = 5 \cdot 437 - 24 \cdot 91. \end{aligned}$$

Es folgt $-24 \cdot 91 \equiv 1 \pmod{437}$. Multiplizieren wir beide Seiten der gegebenen Kongruenz mit -24 , so erhalten wir

$$x \equiv -24 \cdot 37 = -888 \equiv -14 \pmod{437}.$$

(b) Zunächst berechnen wir die rechte Seite. Wegen $\varphi(15) = \varphi(3)\varphi(5) = 2 \cdot 2 = 8$ und $2013 = 251 \cdot 8 + 5$ gilt nach dem Satz von Euler

$$7^{2013} = 7^{251 \cdot 8 + 5} \equiv 7^5 = 49 \cdot 49 \cdot 7 \equiv 4 \cdot 4 \cdot 7 = 7 \pmod{15}.$$

Ohne die Kenntnis des Satzes kann man so vorgehen:

$$7^2 \equiv 4, \quad 7^3 \equiv 4 \cdot 7 \equiv -2, \quad 7^4 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{7},$$

also

$$7^{2013} = 7^{503 \cdot 4 + 1} \equiv 7 \pmod{15}.$$

Der Euklidische Algorithmus liefert

$$\begin{aligned} 15 &= 3 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1, \end{aligned}$$

also

$$1 = 4 - (15 - 3 \cdot 4) = 4 \cdot 4 - 15.$$

Multiplizieren wir beide Seiten der gegebenen Kongruenz mit 4, so erhalten wir

$$y \equiv 4 \cdot 7 = 28 \equiv 13 \pmod{15}.$$

Aufgabe 3.

Durch schriftliche Division finden wir das Kontrollpolynom

$$h(x) = (x^6 - 1) : (x^4 + x^3 + x + 1) = x^2 + x + 1.$$

Die Kontrollmatrix ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenden wir sie auf die gegebenen Wörter

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das zweite Wort ist also richtig. Durch Vergleich mit den Spalten der Matrix (die paarweise verschieden und nicht Null sind) finden wir, dass im ersten Wort das dritte Bit falsch ist, im dritten Wort hingegen das zweite Bit.

Da der Code die Länge 6 und das Kontrollpolynom den Grad 4 hat, ist der Code zweidimensional. Er besteht somit aus vier Wörtern, also neben dem Nullwort aus den eben gefundenen Wörtern

$$110110, \quad 101101, \quad 011011.$$

Das Minimalgewicht ist 4, der Code kann also drei Fehler erkennen und einen korrigieren.

Aufgabe 4.

(a) Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

hat die Lösungen

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm 2i,$$

also ist

$$u_n = a(3 + 2i)^n + b(3 - 2i)^n.$$

Durch Einsetzen der Anfangswerte ergibt sich

$$a + b = 0, \quad a(3 + 2i) + b(3 - 2i) = 4,$$

also $b = -a = i$ und somit

$$u_n = -i(3 + 2i)^n + i(3 - 2i)^n.$$

(b) Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

kann man mit der binomischen Formel in der Form

$$(\lambda + 1)^3 = 0$$

schreiben. Sie hat die Lösung $\lambda = -1$ mit der Vielfachheit 3, also ist

$$u_n = (a + bn + cn^2)(-1)^n.$$

Durch Einsetzen der Anfangswerte ergibt sich

$$a = 0, \quad -(a + b + c) = -1, \quad a + 2b + 4c = 4,$$

also $b = 0$, $c = 1$ und somit

$$u_n = (-1)^n n^2.$$