

Diskrete Mathematik

Musterlösungen zur zweiten Klausur

Aufgabe 1.

(a) Da sich die zwölf Zahlen auf 11 Restklassen modulo 11 verteilen, muss nach dem Schubfachprinzip eine Restklasse zwei der Zahlen enthalten.

(b) Unter den Zahlen von 1 bis 1001 gibt es $1001 : 7 = 143$ Zahlen, die durch 7 teilbar sind, $1001 : 11 = 91$ Zahlen, die durch 11 teilbar sind, und $1001 : 13 = 77$, die durch 13 teilbar sind. Da 7 und 11 teilerfremd sind, ist eine Zahl genau dann durch 7 und 11 teilbar, wenn sie durch $7 \cdot 11$ teilbar ist. Davon gibt es $1001 : (7 \cdot 11) = 13$ unter den angegebenen Zahlen. Analog gibt es 11 Zahlen, die durch 7 und 13 teilbar sind, 7 Zahlen, die durch 11 und 13 teilbar sind, und schließlich $1001 : (7 \cdot 11 \cdot 13) = 1$ Zahl, die durch 7, 11 und 13 teilbar ist, nämlich 1001. Nach Inklusion/Exklusion sind also

$$1001 - 143 - 91 - 77 + 13 + 11 + 7 - 1 = 720$$

der angegebenen Zahlen weder durch 7 noch durch 11 noch durch 13 teilbar.

Aufgabe 2.

Wir berechnen die Differenzen der angegebenen Restklassen modulo 21:

	1	3	8	9	12
1	–	2	7	8	11
3	19	–	5	6	9
8	14	16	–	1	4
9	13	15	20	–	3
12	10	12	17	18	–

Da jede von Null verschiedene Restklasse genau einmal als Differenz vorkommt, ist $K = \{1, 3, 8, 9, 12\}$ eine Differenzenfamilie (wobei jede Zahl für ihre Restklasse steht).

Die Blöcke $K, K + 1, \dots, K + 20$ bilden nach einem Satz der Vorlesung ein 2-Design mit $v = 21$ Varietäten und $b = 21$ Blöcken der Größe $k = 5$. Aus der durch doppeltes Abzählen gewonnenen Gleichung $kb = vr_1$ ergibt sich $r_1 = 5$, und die Gleichung $(k - 1)r_1 = (v - 1)r_2$ aus der Formelsammlung liefert $r_2 = 1$. (Dies hätte man auch direkt aus der Formel $r_2 = k(k - 1)/(v - 1)$ ablesen können, die im besagten Satz angegeben wurde.)

Gäbe es ein 3-Design mit den selben Parametern v, k und b , so wäre $(k - 2)r_2 = (v - 2)r_3$, was nicht sein kann, weil $v - 2$ kein Teiler von $(k - 2)r_2$ ist.

Aufgabe 3.

(a) Die Zeilen der Kontrollmatrix sind Lösungsvektoren des Gleichungssystems, dessen Zeilen durch die Basis des gegebenen Codes gebildet werden, also

$$\begin{array}{rcccccc} y_1 + y_2 + y_3 & & & & & & = 0 \\ & & & & y_5 + y_6 + y_7 & & = 0 \\ y_1 & & + y_4 & & & + y_7 & = 0 \end{array}$$

Wählen wir y_1, y_2, y_6 und y_7 als freie Variablen, so erhalten wir als Basis des Lösungsraums die Zeilen der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir eine Kontrollmatrix gefunden.

(b) Die übrigen Codewörter ergeben sich als Linearkombinationen der gegebenen Basiswörter, also

$$0000000, \quad 1110111, \quad 0111001, \quad 1001110, \quad 0111110.$$

Das Minimalgewicht ist $\delta = 3$.

(c) Laut Formelsammlung kann der Code zwei Fehler erkennen, aber nur einen korrigieren.

(d) In der Hammingsschranke

$$2^7 \geq 2^3 \left(1 + \binom{7}{1} \right)$$

gilt keine Gleichheit, also ist der Code nicht perfekt

Aufgabe 4.

Durch schriftliche Division finden wir

$$\begin{array}{r} (1 - 3x + 7x^2) : (1 - x + 5x^2) = 1 - 2x + 10x^3 + 10x^4 - 40x^5 + \dots \\ \underline{1 - x + 5x^2} \\ -2x + 2x^2 \\ \underline{-2x + 2x^2 - 10x^3} \\ 10x^3 \\ \underline{10x^3 - 10x^4 + 50x^5} \\ 10x^4 - 50x^5 \\ \underline{10x^4 - 10x^5 + 50x^6} \\ -40x^5 - 50x^6 \\ \underline{-40x^5 + 40x^6 - 200x^7} \\ -90x^6 + 200x^7 \end{array}$$

Ersetzen wir die Koeffizienten durch ihre Restklassen modulo 2, so sind Zähler und Nenner gleich $1 + x + x^2$, also ist das Ergebnis in diesem Fall gleich 1.