Universität Bielefeld WS 2006/07
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu Komplexen Mannigfaltigkeiten

Blatt 1 - Abgabe bis 25.10.2006

Es sei $K = \mathbb{C}$ oder $K = \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass eine rationale Abbildung $K^n \to K^m$ (d. h. eine Abbildung, deren Koordinaten durch rationale Funktionen gegeben sind) K-analytisch auf ihrem Definitionsbereich ist.

2. Es sei A eine endlichdimensionale assoziative normierte K-Algebra mit Einselement (z. B. die Algebra der $(n\times n)$-Matrizen mit Einträgen in K oder den Hamiltonschen Quaternionen). Insbesondere sei also $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ für x, $y \in A$. Zeigen Sie, dass die Menge $A^\times$ der invertierbaren Elemente offen in A ist. Finden Sie die Reihenentwicklung der Inversenabbildung $f : A^\times \to A$, d. h. $f(x) = x^{-1}$, um einen Punkt $a \in A^\times$.

3. Finden Sie eine Potenzreihe
$$\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}x^i y^j,$$
bei der die Reihen
$$\sum_{i,j\geq 0} \left|a_{ij}x^i y^j\right| \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=n}} a_{ij}x^i y^j \right|$$
verschiedene Konvergenzbereiche haben.

4. Es seien $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{T})$ glatte (bzw. reell-analytische bzw. holomorphe) Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $F : X \to Y$ genau dann ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten ist, wenn für alle Karten (U, φ) einen Atlasses von $(X, \mathcal{S})$ und alle Karten (V, ψ) eines Atlasses von $(Y, \mathcal{T})$ die Abbildung $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ glatt (bzw. reell-analytisch bzw. holomorph) ist.