Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

WS 2006/07

Übungen zu Komplexen Mannigfaltigkeiten

Blatt 2 - Abgabe bis 6.10.2006

5. Es sei p ein Polynom in einer Variablen mit komplexen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass die Menge
$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = p(x)\}$$
eine komplexe Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^2$ ist, wenn p keine mehrfachen Nullstellen hat. Gilt auch die Umkehrung?

6. Entscheiden Sie in jedem der folgenden Fälle, ob $\mathcal{S}$ eine Funktionenprägarbe bzw. eine Funktionengarbe auf $\mathbb{C}$ ist, wenn wir für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ mit $\mathcal{S}(U)$ die Menge der Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft bezeichnen:

   (a) f ist holomorph und beschränkt.

   (b) f ist holomorph und hat eine Nullstelle in U.

   (c) f ist holomorph, und wenn $0 \in U$, so ist $f(0) = 0$.

   (d) f ist konstant.

7. Es sei $\mathcal{P}$ eine Funktionenprägarbe auf X. Für jede offene Menge U sei $\mathcal{S}(U)$ die Menge aller Funktionen $f : U \to K$, für die eine Familie offener Mengen $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ existiert, so dass U die Vereinigung der U_α und $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{P}(U_\alpha)$ für jedes $\alpha \in A$ ist.

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe ist.

8. Es sei S die Menge aller linear unabhängigen k-Tupel von Vektoren in $\mathbb{C}^n$ und G die Menge aller k-dimensionalen Unterräume in $\mathbb{C}^n$. Wir betrachten S als offene Untermannigfaltigkeit im Vektorraum $M_{n,k}(\mathbb{C})$ der $(n \times k)$-Matrizen und nennen eine Menge $U \subset G$ offen, wenn ihr Urbild unter der natürlichen Abbildung $\pi : S \to G$ offen ist. Schließlich sei $\mathcal{S}(U)$ die Menge der $f : U \to \mathbb{C}$, für die $\pi^*(f) \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$.

   (a) Es sei $U_0 = \{V \in G \mid V \cap V_0 = \{0\}\}$, wobei V_0 der von den letzten $n-k$ Vektoren der Standardbasis aufgespannte Unterraum ist. Zeigen Sie, dass $\pi^{-1}(U_0)$ aus den Matrizen X besteht, für die die aus den oberen k Zeilen bestehende Untermatrix $H(X)$ invertierbar ist.

(b) Die Abbildung $\tilde{\varphi}$ von $\pi^{-1}(U_0)$ zum affinen Unterraum $A_0 = \{X \in M_{n,k}(\mathbb{C}) \mid H(X) = I\}$ sei gegeben durch

$$\tilde{\varphi}(X) = X \cdot H(X)^{-1}.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{\varphi}(X) = \varphi(\pi(X))$ für eine eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi : U_0 \to A_0$.

(c) Zeigen Sie, dass φ eine Karte von $(G, \mathcal{S})$ ist.