Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann WS 2006/07

Übungen zu Komplexen Mannigfaltigkeiten

Blatt 3 - Abgabe bis 15.11.2006

11. Es sei $G_k(V)$ die Grassmannmannigfaltigkeit der k-dimensionalen Unterräume in einem n-dimensionalen K-Vektorraum V und $S_k(V)$ die Stiefelmannigfaltigkeit der linear unabhängigen k-Tupel in V. Weiter bezeichne $\pi_k : S_k(V) \to G_k(V)$ die natürliche Projektion. Wir definieren eine Abbildung $\tilde{F} : S_k(V) \to S_1(\bigwedge^k(V))$ durch
$$\tilde{F}(v_1, \ldots, v_k) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k.$$
   (a) Zeigen Sie, dass genau eine Abbildung $F : G_k(V) \to G_1(\bigwedge^k(V))$ existiert, so dass $\pi_1 \circ \tilde{F} = F \circ \pi_k$.
   (b) Zeigen Sie, dass F eine topologische Einbettung ist.

12. Es sei $G_k(V)$ wie oben mit Strukturgarbe $\mathcal{S}$. Ist U offen in $G_k(V)$ und $W \in U$, so definieren wir für $A \in \mathrm{Hom}(W, V)$ eine Abbildung $\partial_A : \mathcal{S}(U) \to K$ wie folgt: $\partial_A f$ ist die Ableitung von $f((I + tA)W)$, $t \in K$, an der Stelle $t = 0$, wobei $I : W \to V$ die natürliche Einbettung bezeichnet. Zeigen Sie, dass dadurch ein Isomorphismus von $\mathrm{Hom}(W, V/W)$ auf den Tangentialraum $T_W(G_k(V))$ induziert wird.

13. Es sei p ein Polynom ohne mehrfache Nullstellen und $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = p(x)\}$. Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Differentialform ω auf X gibt, so dass auf der Menge $U = \{(x, y) \in X \mid y \neq 0\}$ gilt
$$\omega = \frac{dx}{y}.$$
Zeigen Sie, dass im Falle $\deg p = 3$ der Abschluss von X in $P_2(\mathbb{C})$ eine Untermannigfaltigkeit ist und ω sich holomorph auf den Abschluss fortsetzt.

14. Zeigen Sie, dass auf der n-dimensionalen Einheitssphäre $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Differentialform μ existiert, so dass für jedes $0 \leq i \leq n$ auf der Menge $U_i = \{x \in S \mid x_i \neq 0\}$ gilt
$$\mu = \frac{(-1)^i}{x_i}\, dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$
wobei der Term mit dem Dach wegzulassen ist.