Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann WS 2006/07

Übungen zu Komplexen Mannigfaltigkeiten

Blatt 4 - Abgabe bis 22.11.2006

15. Beweisen Sie, dass für alternierende Differentialformen ω und ψ der Stufen p bzw. q und ein Vektorfeld v gilt
$$\iota_v(\omega \wedge \psi) = \iota_v\omega \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge \iota_v\psi.$$

16. Es sei A eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierte assoziative Algebra, d. h. $A = A^0 \oplus A^1$, und für $a \in A^i$ und $b \in A^j$ mit i, $j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt
$$ab \in A^{i+j}, \qquad ba = (-1)^{ij} ab.$$
Für $k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sei D^k die Menge aller linearen Abbildungen $d : A \to A$, so dass für a und b wie oben gilt
$$d(a) \in A^{i+k}, \qquad d(ab) = d(a)b + (-1)^{ik} a d(b).$$
Für $d \in D^k$ und $e \in D^l$ definieren wir
$$[d, e] = d \circ e - (-1)^{kl} e \circ d.$$
Zeigen Sie, dass $[d, e] \in D^{k+l}$.

17. Es sei X eine dreidimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit nichtverschwindender Volumenform ω und g eine pseudo-Riemannsche Metrik auf X, d. h. für jedes $a \in X$ ist g_a eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf $T_a(X)$, und für glatte Vektorfelder v_1, v_2 ist $g(v_1, v_2)$ glatt.
Man zeige, dass es für jedes Vektorfeld v ein Vektorfeld $\operatorname{rot} v$ gibt, so dass
$$d(\iota_v g) = \iota_{\operatorname{rot} v}\,\omega.$$
Man formuliere den Spezialfall des Satzes von Stokes für die Standardform ω und die Standardmetrik g auf $\mathbb{R}^3$ sowie eine Untermannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand.

18. Geben Sie ein Beispiel einer offenen Überdeckung eines (selbstverständlich nicht Hausdorffschen) topologischen Raumes X, so dass keine untergeordnete Zerlegung der Eins existiert.