Universität Bielefeld WS 2006/07
Prof. W. Hoffmann

# Übungen zu Komplexen Mannigfaltigkeiten

## Blatt 5 - Abgabe bis 29.11.2006

19. Es sei $\pi : E \to X$ ein Geradenbündel mit der Strukturgarbe $\mathcal{S}$ und $k$ eine natürliche Zahl. Geben Sie einen kanonischen Isomorphismus vom Raum der Schnitte von $E^{-k}$ über einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf den Raum der Funktionen $f \in \mathcal{S}(\pi^{-1}(U))$ mit der Eigenschaft $f(\lambda v) = \lambda^k f(v)$ für alle $a \in U$ und $v \in E_a$ an.

    Was bedeutet dies im Fall des universellen Geradenbündels über einem projektiven Raum? Was muss man für $k \in \mathbb{Z}$ modifizieren?

20. Es sei $V$ ein $(n+1)$-dimensionaler $K$-Vektorraum und $L$ ein eindimensionaler Unterraum. Für $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{Hom}(L, V/L)$ definieren wir $\omega : L \to \bigwedge^{n+1}(V)$ durch
$$\omega(v) = v \wedge f_1(v) \wedge \cdots \wedge f_n(v).$$
    Beweisen Sie folgende Aussagen.

    (a) $\omega$ ist korrekt definiert und hängt nur von $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \in \bigwedge^n(\mathrm{Hom}(L, V/L))$ ab.

    (b) Die Zuordnung $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \mapsto \omega$ ist ein Isomorphismus des eindimensionalen Vektorraumes $\bigwedge^n(\mathrm{Hom}(L, V/L))$ auf den Raum aller homogenen Funktionen $L \to \bigwedge^{n+1}(V)$ vom Grad $n+1$.

    (c) Das kanonische Bündel des projektiven Raumes $P(V)$ ist isomorph zur $(n+1)$ten Potenz des universellen Geradenbündels über $P(V)$.

21. Sind $E$ und $F$ Vektorbündel über $X$ und ist $\Delta : X \to X \times X$ die Diagonaleinbettung, so gilt
$$E \otimes F = \Delta^*(E \boxtimes F).$$

22. Geben Sie ein Beispiel einer Submersion an, die keine lokal-triviale Faserung ist. Ist dies auch für eigentliche Submersionen auf eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit möglich?