Übungen zu Komplexen Mannigfaltigkeiten

Blatt 6 - Abgabe bis 13.12.2006

23. Es sei $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$ eine holomorphe Funktion und $f(z) = g(z, \bar{z})$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \partial_1 g, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \partial_2 g,$$

wobei rechts die partiellen Ableitungen von g nach dem ersten bzw. zweiten Argument stehen.

24. Es sei $(X, \mathcal{T}, J)$ eine fast komplexe Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie folgende Aussagen.

- (a) Es gibt genau einen Schnitt S des Vektorbündels der faserweise bilinearen Abbildungen $T_a(X) \times T_a(X) \rightarrow T_a(X)$, so dass für Vektorfelder v und w gilt

$$S(v, w) = [Jv, Jw] - [v, w] - J[Jv, w] - J[v, Jw].$$

- (b) Es sei $\eta \in \mathcal{T}^2(X)$ und

$$\sigma(v, w) = \eta(v, w) + i\eta(Jv, w) + i\eta(v, Jw) - \eta(Jv, Jw).$$

Dann gilt $\sigma = 2\pi^{0,2}(\eta)$, wobei $\pi^{p,q} : \mathcal{T}^\bullet(X) \rightarrow \mathcal{T}^{p,q}(X)$ die offensichtliche Projektion bezeichnet.

(Hinweis: Betrachten Sie $df \wedge dg$, $df \wedge d\bar{g}$, $d\bar{f} \wedge dg$ und $d\bar{f} \wedge d\bar{g}$.)

- (c) Ist $\omega \in \mathcal{T}^{1,0}(X)$, $\eta = d\omega$ und σ wie in (b), so gilt $\omega(S(v, w)) = \sigma(v, w)$.
- (d) Die komplexe Struktur J ist genau dann integrabel, wenn S identisch verschwindet.
25. Es sei S die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die durch $J_a v = a \times v$ gegebene Abbildung $J_a \in \text{End}(T_a(S))$ eine komplexe Struktur auf S definiert.
26. Zeigen Sie, dass eine Aufspaltung $V = U \oplus W$ eines Vektorraums eine $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -Graduierung von $\bigwedge(V)$ erzeugt.