Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

WS 2006/07

Übungen zu Komplexen Mannigfaltigkeiten

Blatt 7 - Abgabe bis 17.1.2007

27. Beschreiben Sie die Garben $\bar{\mathcal{F}}$, die von folgenden Prägarben $\mathcal{F}$ auf X erzeugt werden, sowie den natürlichen Morphismus $\mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$:

    (a) $X = \mathbb{C}$, und $\mathcal{F}(U)$ ist die Menge der beschränkten holomorphen Funktionen auf U.

    (b) $\mathcal{F}(U)$ ist die Menge aller Abbildungen $s : U \times U \to Y$, wobei Y eine feste Menge ist.

28. Es sei $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf (offenen Teilmengen von) $\mathbb{C}^2$ und $\mathcal{I}$ die Untergarbe der Funktionen, die im Punkt $(0, 0)$ verschwinden. Zeigen Sie, dass die Folge

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\nu} \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \xrightarrow{\mu} \mathcal{I} \longrightarrow 0,$$

    wobei

$$\nu(f)(z) = (z_2 f(z), z_1 f(z)), \qquad \mu(f_1, f_2)(z) = z_1 f_1(z) - z_2 f_2(z),$$

    exakt ist, dass aber $\mathcal{I}$ keine lokal freie Garbe von $\mathcal{O}$-Moduln ist.

29. Es sei

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$$

    eine exakte Folge von Garben von abelschen Gruppen auf einem topologischen Raum X. Zeigen Sie, dass die Folge von abelschen Gruppen

$$0 \to \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X) \to \mathcal{C}(X)$$

    exakt ist.

30. Es sei

$$\cdots \to A^{-1} \to A^0 \to A^1 \to A^2 \to \ldots$$

    ein Komplex von abelschen Gruppen und $K^i = \mathrm{Ker}(A^i \to A^{i+1})$. Beweisen Sie, dass der Komplex genau dann exakt ist, wenn die Folgen

$$0 \to K^i \to A^i \to K^{i+1} \to 0$$

    für alle i exakt sind. Übertragen Sie das Ergebnis auf Komplexe von Garben.