Scriptum zur Vorlesung
Komplexe Mannigfaltigkeiten

Prof. W. Hoffmann

1 Differenzierbare Abbildungen

Es sei K einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 1 *Es seien X und Y endlichdimensionale K-Vektorräume und U eine offene Teilmenge von X. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt K-differenzierbar an der Stelle $a \in U$, wenn es eine Abbildung $F : U \to \mathrm{Hom}_K(X, Y)$ gibt, die an der Stelle a stetig ist, so dass gilt*

$$f(x) = f(a) + F(x)(x - a)$$

Wir können X und Y durch Wahl von Basen mit Räumen K^n bzw. K^m von Spaltenvektoren identifizieren. Homomorphismen $K^n \to K^m$ sind durch $(m \times n)$-Matrizen gegeben.

Lemma 1 *Ist f an der Stelle a differenzierbar, so ist die Ableitung $f'(a) := F(a)$ unabhängig von der Wahl von F.*

Beweis. Angenommen, $F + G$ erfüllt dieselben Bedingungen wie F. Dann gilt $G(a + v)v = 0$ für v in einer Umgebung V der Null. Wir können eine Nullumgebung W wählen, so dass $tW \subset V$ für alle $t \in K$ mit $0 < |t| \leq 1$. Ist $w \in W$, so folgt $G(a + tw)w = 0$ und durch Grenzübergang $G(a)w = 0$. Da W eine Basis von X enthält, folgt $G(a) = 0$. □

Bemerkung. Meist wird die Differenzierbarkeit definiert, indem man die Existenz einer Abbildung $L \in \mathrm{Hom}_K(X, Y)$ verlangt, so dass

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x - a)}{\|x - a\|} = 0,$$

wobei eine Norm auf X fixiert wurde. Natürlich ist dann $f'(a) = L$. Bezeichnen wir den Zähler mit $r(x)$, so ergibt sich aus unserer Definition

$$r(x) = (F(x) - F(a))(x - a).$$

Umgekehrt kann man z. B.

$$F(a+v)w = Lv + \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} r(v) = Lv + \left\langle w, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{r(v)}{\|v\|}$$

setzen, wobei man ein Hermitesches Skalarprodukt auf X benutzt. Beide Definitionen sind also äquivalent. Ist f an einer Stelle differenzierbar, so ist f an dieser Stelle auch stetig.

Unsere Definition eignet sich am besten zum Beweis der Differentiationsregeln (Summen- und Produktregel, Kettenregel). Die alternative Definition zeigt: Ist die Abbildung f zwischen $\mathbb{C}$-Vektorräumen an einer Stelle $\mathbb{R}$-differenzierbar und ist $f'(a)$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, so ist f an dieser Stelle $\mathbb{C}$-differenzierbar. Es ist auch offensichtlich, dass eine Abbildung $f : U \to Y$ an einer Stelle genau dann differenzierbar ist, wenn ihre Koordinaten bezüglich einer Basis von Y an dieser Stelle differenzierbar sind.

Definition 2 *Die Abbildung $f : U \to Y$ heißt null mal stetig differenzierbar, wenn sie stetig ist. Sie heißt k mal stetig differenzierbar für $k > 0$, wenn sie an jeder Stelle in U differenzierbar ist und $f' : U \to \mathrm{Hom}_K(X, Y)$ $k-1$ mal stetig differenzierbar ist.*

Die $k$te Ableitung $f^{(k)}(a)$ ist dann eine K-multilineare Abbildung $X^k \to Y$.

Der Satz über die implizite und inverse Funktion kann im komplexen Fall genau wie im reellen Fall bewiesen werden. Man kann ihn aber auch aus dem reellen Fall ableiten, weil die Ableitung der impliziten bzw. inversen Abbildung anhand ihrer Formel als $\mathbb{C}$-linear zu erkennen ist.

2 Analytische Abbildungen

Definition 3 *Es sei U eine offene Teilmenge von K^n und Y ein endlichdimensionaler normierter K-Vektorraum. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt K-analytisch an der Stelle $a \in U$, wenn es für jedes $I \in \mathbb{N}^n$ ein $y_I \in Y$ gibt, so dass für x in einer Umgebung von a gilt*

$$f(x) = \sum_{I \in \mathbb{N}^n}^{\infty} y_I (x-a)^I, \tag{1}$$

wobei die Reihe absolut konvergiert.

Dabei schreiben wir für $I = (i_1, \ldots, i_n)$

$$v^I = v_1^{i_1} \ldots v_n^{i_n}.$$

Wegen der absoluten Konvergenz (bezüglich der Norm in Y) spielt die Reihenfolge der I keine Rolle.

Satz 1 *Konvergiert die Potenzreihe*

$$\sum_{I \in \mathbb{N}^n} y_I x^I$$

an der Stelle $c \in K^n$, so konvergiert sie absolut gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge C von

$$D = \{x \in K^n : |x_1| < |c_1|, \ldots, |x_n| < |c_n|\}$$

gegen eine Funktion f, die in jedem Punkt von D analytisch ist, und ihre Ableitung kann durch gliedweise Differentiation bestimmt werden.

Beweis. Wir können annehmen, dass alle $|c_k| > 0$ sind, da sonst nichts zu beweisen ist. Es sei

$$r_k = \max_{x \in C} \frac{|x_k|}{|c_k|},$$

so dass $0 \le r_k < 1$. Dann ist

$$\sum_I \|y_I x^I\| \le \sum_I \|y_I c^I\| r^I \le \sup_I \|y_I c^I\| \sum_I r^I,$$

wobei das Supremum wegen der Konvergenz an der Stelle c existiert, und

$$\sum_I r^I = \prod_{k=1}^n \sum_{i_k=0}^\infty r_k^{i_k} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - r_k}.$$

Es folgt die absolut gleichmäßige Konvergenz und somit die Stetigkeit von f.

Ist $b \in D$ und $v \in K^n$ mit $|v_k| < |c_k| - |b_k|$ für alle k, so gilt

$$\sum_I y_I (b+v)^I = \sum_I y_I \sum_{J \le I} \binom{I}{J} b^{I-J} v^J = \sum_J \left(\sum_{I \ge J} \binom{I}{J} y_I b^{I-J} \right) v^J, \tag{2}$$

wobei $J \le I$ bedeutet, dass $j_k \le i_k$ für alle k, und

$$\binom{I}{J} = \prod_{k=1}^n \binom{i_k}{j_k}.$$

Wir können nämlich den großen Umordnungssatz anwenden, denn wenn wir jeden Term durch seine Norm abschätzen, erhalten wir

$$\sum_I \|y_I\| \sum_{J \le I} \binom{I}{J} |b^{I-J} v^J| \le \sum_I \|y_I\| \prod_{k=1}^n (|b_k| + |v_k|)^{i_k} \le \sum_I \|y_I c^I\|.$$

Wir beweisen die Behauptung über die Ableitung zunächst für $b = 0$. Wir klammern die Variable x_n aus allen Termen aus, in denen sie vorkommt:

$$f(x) = f(0) + x_n \sum_{I \in N_n} y_I x^{I'} + \sum_{I \in \mathbb{N}^{n-1}} y_{I,0} x^{I,0},$$

wobei

$$N_n = \{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n \,:\, i_n > 0\}, \qquad (i_1, \ldots, i_n)' = (i_1, \ldots, i_{n-1}, i_{n-1}).$$

Dann verfahren wir mit dem Rest ebenso bezüglich der Variablen x_{n-1} usw.:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{I \in N_k} y_{I,0_{n-k}} x^{I',0_{n-k}},$$

wobei 0_{n-k} das $(n-k)$-Tupel aus lauter Nullen bezeichnet. Die hier vorkommenden Reihen lassen sich durch die Ausgangsreihe abschätzen, konvergieren also auf C gegen stetige Funktionen. Aus der Definition folgt nun, dass f an der Stelle 0 differenzierbar ist und

$$f'(0)v = y_{1,0,\ldots,0} v_1 + \cdots + y_{0,\ldots,0,1} v_n = \sum_{|I|=1} y_I v^I,$$

wobei wir für Multiindizes definieren

$$|(i_1, \ldots, i_n)| = i_1 + \cdots + i_n.$$

Hat man eine Potenzreihe der Form (1), so kann man dieses Ergebnis auf die Funktion $f(a + v)$ anwenden.

Ist $b \in C$ beliebig, so wenden wir es auf die Formel (2) an. Wir erhalten für $f'(b)v$ die Teilsumme über alle J mit $|J| = 1$. Dies ist dieselbe Formel, die man durch gliedweise Differentiation erhält, denn ist z. B. $j_k = 1$ die nichtverschwindende Komponente von J, so gilt $\binom{I}{J} = i_k$. $\square$

Folgerung 1 *Ist f an der Stelle a K-analytisch, so ist sie in einer Umgebung von a unendlich oft K-differenzierbar, und die Koeffizienten der sie darstellenden Reihe sind eindeutig bestimmt durch*

$$f^{(k)}(a)(v, \ldots, v) = k! \sum_{|I|=k} y_I v^I.$$

(Die Reihe ist also die Taylorreihe von f.)

Beweis. Wir können den Satz wiederum auf die Ableitung anwenden usw. Die $k$te Ableitung angewendet auf k gleiche Vektoren v ist die k-fache Richtungsableitung, also die $k$te Ableitung von $f(a+tv)$ als Funktion einer Variablen $t \in K$. □

Man kann durch Abschätzungen beweisen, dass Summe, Produkt und Verkettung analytischer Abbildungen analytisch sind, und auch der Satz über die implizite und inverse Funktion gilt im Rahmen der analytischen Funktionen. Dies wird sich aber sowieso nebenbei aus Satz 4 ergeben.

Satz 2 *Ist U ein Gebiet (eine zusammenhängende offene Teilmenge) in K^n und verschwindet die analytische Funktion $f : U \to K$ auf einer offenen Teilmenge von U, so verschwindet sie auf ganz U.*

Beweis. Es sei V die Menge aller Punkte von U, in deren Umgebung f verschwindet. Dies ist eine offene und nach Voraussetzung nichtleere Menge. Alle Ableitungen von f sind stetig und verschwinden somit auf dem Abschluss von V in U. Gehört a zu diesem Abschluss, so ist die Taylorentwicklung von f um a gleich Null, also ist $a \in V$. Die Menge V ist also abgeschlossen in U. Da U zusammenhängend ist, folgt $V = U$. □

Definition 4 *Eine Abbildung von einer offenen Menge in $\mathbb{C}^n$ nach einem $\mathbb{C}$-Vektorraum Y heißt holomorph, wenn sie in jedem Punkt $\mathbb{C}$-differenzierbar ist.*

Satz 3 (Cauchysche Integralformel) *Es sei $r_1 > 0, \ldots, r_n > 0$ und*

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < r_1, \ldots, |z_n| < r_n\}.$$

Ist f holomorph auf einer Umgebung von $\bar{D}$, dann gilt für $a \in D$

$$f(a) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=r_1} \cdots \int_{|z_n|=r_n} \frac{f(z)}{(z_1 - a_1) \ldots (z_n - a_n)} \, dz_n \ldots dz_1.$$

Hierbei wählen wir jeweils den positiven Umlaufsinn. Da der Integrationsbereich kompakt und der Integrand stetig ist, gibt es keine Konvergenzprobleme.

Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist dieser Satz aus der Funktionentheorie bekannt. Angenommen, er gilt bereits für $n-1$ Variablen. Die Funktion $f(z_1, \ldots, z_{n-1}, a_n) = f(z', a_n)$ ist holomorph auf einer Umgebung des Abschlusses von

$$D' = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} : |z_1| < r_1, \ldots, |z_{n-1}| < r_{n-1}\}.$$

Also gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$f(a) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{|z_1|=r_1} \cdots \int_{|z_{n-1}|=r_{n-1}} \frac{f(z', a_n)}{(z_1 - a_1) \dots (z_{n-1} - a_{n-1})} \, dz_{n-1} \dots dz_1.$$

Für festes $z' \in \bar{D}'$ ist $f(z', z_n)$ in einer Umgebung von $\{z_n \in \mathbb{C} : |z_n| \leq r_n\}$ holomorph, also gilt nach dem Induktionsanfang

$$f(z', a_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_n|=r_n} \frac{f(z', z_n)}{z_n - a_n} \, dz_n,$$

Setzen wir dies ein, so folgt die Behauptung. □

Jetzt können wir für $K = \mathbb{C}$ die Umkehrung der ersten Aussage von Folgerung 1 beweisen.

Satz 4 *Jede holomorphe Abbildung ist analytisch.*

Beweis. Es gilt für $a \in D$

$$\frac{1}{z_k - a_k} = \frac{1}{z_k\left(1 - \frac{a_k}{z_k}\right)} = \frac{1}{z_k} \sum_{i_k=0}^{\infty} \left(\frac{a_k}{z_k}\right)^{i_k},$$

also

$$\frac{1}{(z_1 - a_1) \dots (z_n - a_n)} = \frac{1}{z_1 \dots z_n} \sum_{I \in \mathbb{N}^n} \frac{a^I}{z^I},$$

wobei die Reihe gleichmäßig über z im Integrationsbereich konvergiert. Setzen wir dies in der Cauchyschen Integralformel ein und vertauschen Integration und Summation, so erhalten wir eine Potenzreihe in a mit den Koeffizienten

$$y_I = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=r_1} \cdots \int_{|z_n|=r_n} \frac{f(z)}{z^I} \frac{dz_n}{z_n} \cdots \frac{dz_1}{z_1}.$$

□

Folgerung 2 *Die Verkettung von K-analytischen Abbildungen ist K-analytisch. Insbesondere kann man von K-analytischen Abbildungen zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen sprechen, ohne eine Basis von X festzulegen.*

Beweis der Folgerung. Für $K = \mathbb{C}$ folgt sie mit Hilfe von Satz 4 aus der entsprechenden Aussage über $\mathbb{C}$-differenzierbare Abbildungen.

Angenommen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-analytisch, d. h. ihre Taylorreihe konvergiert in einer Umgebung von a in $\mathbb{R}^n$. Nach Satz 1 konvergiert sie in einer Umgebung V von a in $\mathbb{C}^n$, stellt dort nach Folgerung 1 also eine holomorphe Abbildung $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ dar, und Analoges gilt für eine im Punkt $f(a)$ $\mathbb{R}$-analytische Funktion g. Die Funktion $g \circ f$ stimmt auf $U \cap V$ mit $g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$ überein, ist also nach Satz 4 durch eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten gegeben. Nach Folgerung 1 sind diese Koeffizienten als höhere partielle Ableitungen gegeben. Die partiellen Ableitungen von $f_{\mathbb{C}}$ sind aber die gleichen wie die von f, denn der reelle Differenzenquotient ist die Einschränkung des komplexen. Also sind die Koeffizienten der Potenzreihe reell. □

3 Mannigfaltigkeiten

Definition 5 *(i) Für jede offene Teilmenge U eines topologischen Raumes X sei eine Menge $\mathcal{S}(U)$ von Funktionen auf U mit Werten in K gegeben. Die Zuordnung $\mathcal{S}$ heißt Funktionengarbe, wenn sie folgende Lokalitätseigenschaft hat:*

Ist $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine Familie von offenen Mengen in X (indiziert durch eine beliebige Menge A), ist

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

und $f : U \to K$, so gilt $f \in \mathcal{S}(U)$ genau dann, wenn $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{S}(U_\alpha)$ für alle $\alpha \in A$.

(ii) Es sei $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X und $\mathcal{T}$ eine Funktionengarbe auf Y. Ein Morphismus von $(X, \mathcal{S})$ nach $(Y, \mathcal{T})$ ist eine stetige Abbildung $F : X \to Y$ mit der Eigenschaft, dass für jede offene Menge V in Y und jedes $g \in \mathcal{T}(V)$ gilt

$$F^*(g) := g \circ F \in \mathcal{S}(F^{-1}(V)).$$

Gibt es zudem einen Morphismus G von $(Y, \mathcal{T})$ nach $(X, \mathcal{S})$, so dass $F \circ G = \mathrm{id}$ und $G \circ F = \mathrm{id}$ gilt, so heißt F ein Isomorphismus.

(iii) Es sei $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X und Z eine offene Teilmenge von X. Betrachten wir $\mathcal{S}(U)$ nur für $U \subset Z$, so erhalten wir eine Funktionengarbe auf Z, genannt Einschränkung von $\mathcal{S}$ auf Z, abgekürzt $\mathcal{S}|_Z$.

(iv) Ist $F : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X, so definieren wir eine Funktionengarbe $F(\mathcal{S})$ auf Y durch

$$F(\mathcal{S})(V) = \{g : V \to K \mid F^*(g) \in \mathcal{S}(F^{-1}(V))\}.$$

Beachte, dass $F^{-1}(V)$ offen in X ist. Es ist klar, dass die Verkettung zweier Morphismen von Funktionengarben wieder ein Morphismus von Funktionengarben ist. Auch die natürliche Abbildung $Z \to X$ in (iii) ist ein Morphismus $(Z, \mathcal{S}|_Z) \to (X, \mathcal{S})$.

Beispiel 1. Besteht für jede offene Teilmenge U in X die Menge $\mathcal{S}(U)$ aus allen stetigen Funktionen auf U, so ist $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X. Ist $\mathcal{T}$ auf Y analog definiert, so ist *jede* stetige Abbildung $X \to Y$ ein Morphismus $(X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$.

Beispiel 2. Ist X eine offene Menge in K^n und besteht für jede offene Teilmenge U von X die Menge $\mathcal{S}(U)$ aus allen stetig K-differenzierbaren Funktionen auf U, so ist $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X. Ist $\mathcal{T}$ auf einer offenen Teilmenge Y von K^m analog definiert, so ist eine stetige Abbildung $F : X \to Y$ genau dann ein Morphismus $(X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$, wenn sie K-differenzierbar ist. In der Tat, die Koordinatenfunktionen $g_k(y) = y_k$ gehören ja zu $\mathcal{T}(Y)$. Ist $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus, so ist $F_k = g_k \circ F \in \mathcal{S}(F^{-1}(Y)) = \mathcal{S}(X)$, und F ist somit K-differenzierbar. Die Umkehrung ist offensichtlich.

Beispiel 3. Im vorigen Beispiel können wir überall das Wort „stetig K-differenzierbar“ durch „r mal stetig K-differenzierbar“ oder „unendlich oft K-differenzierbar“ oder „K-analytisch“ ersetzen.

Definition 6 *Ist X eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$, so bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_X$ die Garbe der glatten (d. h. unendlich oft $\mathbb{R}$-differenzierbaren) Funktionen und mit $\mathcal{A}_X$ die Garbe der $\mathbb{R}$-analytischen Funktionen auf X. Ist $X \subset \mathbb{C}^n$, so bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X. Wir lassen den Index weg, wenn er aus dem Zusammenhang klar ist.*

Definition 7 *Es sei $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X und $\mathcal{T}$ eine Funktionengarbe auf Y. Wir sagen, dass $(X, \mathcal{S})$ lokal isomorph zu $(Y, \mathcal{T})$ ist, wenn es zu jedem $a \in X$ eine Umgebung U, eine offene Menge V in Y und einen Isomorphismus $\varphi : (U, \mathcal{S}|_U) \to (V, \mathcal{T}|_V)$ gibt.*

Das Paar $(X, \mathcal{S})$ heißt n-dimensionale glatte (bzw. reell-analytische, bzw. holomorphe) Mannigfaltigkeit, wenn es lokal isomorph zu $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ (bzw. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ bzw. $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$) ist.

Die in der Definition auftretenden lokalen Isomorphismen (genauer, die Paare (U, φ)) heißen Karten von $(X, \mathcal{S})$.

Beispiel 4 (projektiver Raum). Es sei H eine Divisionsalgebra über K (also $H = K$ oder $K = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{H}$) und X ein rechter H-Vektorraum. Wir bezeichnen mit $P(X)$ die Menge aller eindimensionalen Unterräume von X. Ordnen wir einem $x \in X$, $x \neq 0$, den Unterraum $xH = \{xq : q \in H\}$ zu, so erhalten wir eine surjektive Abbildung $\pi : X \setminus \{0\} \to P(X)$. Wir nennen eine Menge $V \subset P(X)$ offen, wenn $\pi^{-1}(V)$ offen ist. Dann ist π stetig. Es sei $\mathcal{T}$ eine der Funktionengarben $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{O}$ auf der offenen Menge $X \setminus \{0\}$ im K-Vektorraum X, und es sei $\mathcal{S} = \pi(\mathcal{T})$ im Sinne von Definition 5(iv). Wir behaupten, dass $(P(X), \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit ist.

Wir definieren für jedes $h \in \mathrm{Hom}_H(X, H)$ eine sogenannte affine Karte $\varphi : U \to A$, wobei

$$U = \{L \in P(X) \,:\, h|_L \neq 0\}$$

offen in $P(X)$ und

$$A = \{x \in X : h(x) = 1\}$$

ein affiner Unterraum von X ist, den wir auf naheliegender Weise mit einer Funktionengarbe $\mathcal{T}_A$ versehen. (Man kann A mit einem affinen Raum der Form K^n identifizieren, indem man einen Korrdinatenursprung in A und eine Basis von $\operatorname{Ker} h$ wählt.) Und zwar ist

$$\varphi(xH) = xh(x)^{-1}, \qquad \varphi^{-1}(x) = xH.$$

Wegen $\pi^{-1}(U) = \{x \in X \,:\, h(x) \neq 0\}$ und $h(xq) = h(x)q$ ist dies wohldefiniert. Wir behaupten, dass (U, φ) eine Karte von $(P(X), \mathcal{S})$ ist.

Es sei V eine offene Menge in U. Ist $f \in \mathcal{S}(V)$, so $f \circ \pi \in \mathcal{T}(\pi^{-1}(V))$, und wegen $f \circ \varphi^{-1}(x) = f \circ \pi(x)$ ist $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{T}_A(\varphi(V))$. Ist hingegen $g \in \mathcal{T}_A(\varphi(V))$, so ist $g \circ \varphi \circ \pi(x) = g(xh(x)^{-1})$, also $\pi^*(g \circ \varphi) \in \mathcal{T}(\pi^{-1}(V))$ und $g \circ \varphi \in \mathcal{S}(V)$. Somit ist unsere affine Karte tatsächlich eine Karte von $(P(X), \mathcal{S})$, und da der projektive Raum $P(X)$ von affinen Karten überdeckt wird, ist er eine Mannigfaltigkeit.

Wir schreiben insbesondere $P_n(H) = P(H^{n+1})$ und

$$(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) = \{(x_0q, x_1q, \ldots, x_nq) \,:\, q \in H\} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)H.$$

Zu den Standardlinearformen

$$h_j(x_0, \ldots, x_n) = x_j.$$

gehören die affinen Karten $\varphi_j : U_j \to A_j$, die gegeben sind durch

$$\varphi_j(x_0 : \cdots : x_n) = (x_0x_j^{-1}, \ldots, x_nx_j^{-1}).$$

Man identifiziert $A_j = \{x \in H^{n+1} \,:\, x_j = 1\}$ mit H^n, indem man die j-te Koordinate weglässt.

Eine Familie von Karten, die X überdeckt, heißt Atlas. Um zu zeigen, dass die traditionelle Definition von Mannigfaltigkeiten mit Hilfe von Atlanten zu unserer Definition äquivalent ist, brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma 2 *Es sei X ein topologischer Raum und $\{X_\beta : \beta \in B\}$ eine offene Überdeckung von X. Auf jedem X_β sei eine Funktionengarbe $\mathcal{S}_\beta$ mit Werten in K gegeben, und für alle β, $\gamma \in B$ gelte*

$$\mathcal{S}_\beta|_{X_\beta \cap X_\gamma} = \mathcal{S}_\gamma|_{X_\beta \cap X_\gamma}. \tag{3}$$

Dann gibt es genau eine Funktionengarbe $\mathcal{S}$ auf X, so dass $\mathcal{S}|_{X_\beta} = \mathcal{S}_\beta$ für alle $\beta \in B$.

Beweis. Für jede offene Menge U von X ist

$$U = \bigcup_{\beta \in B} (U \cap X_\beta).$$

Wenn es also eine Funktionengarbe $\mathcal{S}$ wie behauptet gibt, so muss gelten

$$\mathcal{S}(U) = \{f : U \to K \mid f_{U \cap X_\beta} \in \mathcal{S}_\beta(U \cap X_\beta) \quad \forall \beta \in B\}.$$

Um zu beweisen, dass für gegebene $\mathcal{S}_\beta$ eine solche Funktionengarbe $\mathcal{S}$ existiert, müssen wir $\mathcal{S}(U)$ auf diese Weise definieren.

Nun prüfen wir, dass $\mathcal{S}$ eine Garbe ist. Sei also

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \quad \text{und} \quad f : U \to K.$$

Nach Definition von $\mathcal{S}$ ist $f \in \mathcal{S}(U)$ genau dann, wenn

$$f|_{U \cap X_\beta} \in \mathcal{S}_\beta(U \cap X_\beta) \quad \text{für alle } \beta \in B.$$

Wegen

$$U \cap X_\beta = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap X_\beta)$$

und der Garbeneigenschaft der $\mathcal{S}_\beta$ ist dies äquivalent zu

$$f|_{U_\alpha \cap X_\beta} \in \mathcal{S}_\beta(U_\alpha \cap X_\beta) \quad \text{für alle } \alpha \in A \text{ und } \beta \in B,$$

und nach der Definition von $\mathcal{S}$ ist letzteres genau dann der Fall, wenn

$$f|_{U_\alpha} \in \mathcal{S}(U_\alpha) \quad \text{für alle } \alpha \in A.$$

Schließlich prüfen wir nach, dass für ein beliebiges $\beta \in B$ gilt $\mathcal{S}|_{X_\beta} = \mathcal{S}_\beta$. Sei also U offen in X_β (und somit in X) und $f : U \to K$. Ist $f \in \mathcal{S}(U)$, so folgt $f \in \mathcal{S}_\beta(U)$ aus der Definition von $\mathcal{S}$. Umgekehrt sei $f \in \mathcal{S}_\beta(U)$. Dann gilt für jedes $\gamma \in B$, da $\mathcal{S}_\beta$ eine Funktionengarbe ist,

$$f|_{U \cap X_\gamma} \in \mathcal{S}_\beta(U \cap X_\gamma),$$

und wegen (3) folgt

$$f|_{U \cap X_\gamma} \in \mathcal{S}_\gamma(U \cap X_\gamma).$$

Somit ist $f \in \mathcal{S}(U)$. □

Satz 5 *(i) Ist $(X, \mathcal{S})$ eine glatte (bzw. reell-analytische bzw. holomorphe) Mannigfaltigkeit, so ist für beliebige Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) die Abbildung*

$$(\varphi_2|_{U_1 \cap U_2}) \circ (\varphi_1|_{U_1 \cap U_2})^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

ein Diffeomorphismus (bzw. reell-analytischer Isomorphismus bzw. biholomorph).
(ii) Umgekehrt sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{A}$ eine Familie von Paaren (U, φ), wobei U eine offene Menge in X und φ ein Homöomorphismus auf eine offene Menge in K^n ist, so dass X von den Mengen U überdeckt wird und für beliebige (U_1, φ_1) und $(U_2, \varphi_2) \in \mathfrak{A}$ obige Eigenschaft gilt. Dann gibt es genau eine Funktionengarbe $\mathcal{S}$ auf X, so dass $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{A}$ ihr Atlas ist.

Beweis.
(i) Wir beschränken uns der Kürze halber auf den holomorphen Fall. Sind (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) Karten von $(X, \mathcal{S})$, so ist $\varphi_1|_{U_1 \cap U_2}$ ein Isomorphismus von $(U_1 \cap U_2, \mathcal{S}|_{U_1 \cap U_2})$ auf $(\varphi_1(U_1 \cap U_2), \mathcal{O})$. Analoges für $\varphi_2|_{U_1 \cap U_2}$. Verketten wir den zweiten dieser Isomorphismen mit dem Inversen des ersten, so sehen wir, dass die fragliche Abbildung ein Isomorphismus

$$(\varphi_1(U_1 \cap U_2), \mathcal{O}) \to (\varphi_2(U_1 \cap U_2), \mathcal{O})$$

ist. Nach Beispiel 3 ist ein solcher Morphismus eine holomorphe Abbildung. Dasselbe gilt für sein Inverses.

(ii) Durch jedes $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ wird eine Funktionengarbe auf U definiert, so dass φ ein Isomorphismus ist. Die Bedingung an die Übergangsabbildungen ist äquivalent zu Bedingung (3), und nach Lemma 2 existiert dann eine Funktionengarbe $\mathcal{S}$ auf X mit den vorgegebenen Einschränkungen auf die Karten. □

Die Bezeichnung $(X, \mathcal{S})$ für eine Mannigfaltigkeit ist etwas schwerfällig. Häufig lässt man die Funktionengarbe $\mathcal{S}$ der Kürze halber weg, wie wir es ja auch schon mit der Topologie getan haben. Wird sie wieder benötigt, so schreibt man oft $\mathcal{E}_X$, $\mathcal{A}_X$ oder $\mathcal{O}_X$ in Abhängigkeit vom Typ der Mannigfaltigkeit (glatt, reell-analytisch oder holomorph).

Sind $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{T})$ zwei Mannigfaltigkeiten desselben Typs mit Atlanten $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so kann man jedem Paar von Karten $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ und $(V, \psi) \in \mathfrak{B}$ eine Abbildung

$$\varphi \times \psi : U \times V \to K^m \times K^n$$

zuordnen, und die Menge der Paare $(U \times V, \varphi \times \psi)$ bildet dann bekanntlich einen Atlas für die Struktur einer Mannigfaltigkeit auf dem kartesischen

Produkt $X \times Y$. Die Projektionen

$$P : X \times Y \to X, \qquad Q : X \times Y \to Y$$

sind dann Morphismen von Mannigfaltigkeiten. Die Definition der entsprechenden Funktionengarbe auf $X \times Y$ nach Satz 5 ist etwas umständlich. Jedenfalls hat die Produktmannigfaltigkeit folgende Eigenschaft.

Satz 6 *Ist Z eine Mannigfaltigkeit desselben Typs wie X und Y und sind $F : Z \to X$ und $G : Z \to Y$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $H : Z \to X \times Y$, der das folgende Diagramm kommutativ macht:*

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "P"'] \arrow[dr, "Q"] & \\
X & & Y \\
& Z \arrow[uu, "H"] \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Angenommen, es gibt es einen solchen Morphismus H, und für einen gegebenen Punkt $z \in Z$ sei $H(z) = (x, y)$. Dann ist $P(H(z)) = P(x, y)$, also $F(z) = x$, und analog $G(z) = y$. Es folgt

$$H(z) = (F(x), G(x)),$$

also ist H eindeutig bestimt.

Umgekehrt seien F und G gegeben. Definieren wir H durch obige Gleichung, so prüft man leicht mit Hilfe von Übungsaufgabe 4, dass H ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten ist. $\square$

Folgerung 3 *Ist $(X \times Y, \mathcal{U})$ die Produktmannigfaltigkeit von $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{T})$, so ist $\mathcal{U}$ die kleinste Funktionengarbe auf $X \times Y$, für die P und Q Morphismen von Mannigfaltigkeiten sind.*

Hat nämlich auch $(X \times Y, \mathcal{U}')$ diese Eigenschaft, so gibt es einen Morphismus $H : (X \times Y, \mathcal{U}') \to (X \times Y, \mathcal{U})$ mit $H(x, y) = (x, y)$, also $\mathcal{U}(W) \subset \mathcal{U}'(W)$ für alle offenen W in $X \times Y$.

4 Tangentialvektoren

Definition 8 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit und $a \in X$. Wir führen auf der Menge von Paaren (U, f), wobei U eine Umgebung von a und $f \in \mathcal{S}(U)$*

ist, eine Äquivalenzrelation ein. Die Paare (U_1, f_1) und (U_2, f_2) heißen äquivalent, wenn es eine Umgebung $U \subset U_1 \cap U_2$ von a gibt, so dass $f_1|_U = f_2|_U$. Die Äquivalenzklassen heißen Funktionenkeime an der Stelle a, die Menge der Keime bezeichnen wir als Halm $\mathcal{S}_a$ von $\mathcal{S}$ an der Stelle a. Wir bezeichnen den Keim einer Funktion $f : U \to K$ an der Stelle a mit f_a. Ist $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten, so bezeichnen wir mit $F_a^* : \mathcal{T}_{F(a)} \to \mathcal{S}_a$ die von F^* induzierte Abbildung.

Im analytischen Fall ist f_a durch die Gesamtheit der höheren Ableitungen von f an der Stelle a bestimmt.

Da die Mengen $\mathcal{S}(U)$ K-Vektorräume und die Einschränkungsabbildungen linear sind, ist auch $\mathcal{S}_a$ ein Vektorraum. Die Multiplikation von Funktionen induziert eine Multiplikation von Keimen und verwandelt $\mathcal{S}_a$ in eine kommutative K-Algebra mit dem Augmentationshomomorphismus $f_a \mapsto f(a)$. Die einem Morphismus F zugeordnete Abbildung F_a^* ist ein Homomorphismus von K-Algebren und verträglich mit den Augmentationsabbildungen.

Definition 9 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit und $a \in X$. Ein Tangentialvektor an X im Punkt a ist eine Derivation $v : \mathcal{S}_a \to K$, d. h. eine K-lineare Abbildung mit der Eigenschaft*

$$v(f_a g_a) = v(f_a)g(a) + f(a)v(g_a).$$

Der Vektorraum der Tangentialvektoren an der Stelle a heißt Tangentialraum $T_a(X, \mathcal{S})$ oder kurz $T_a(X)$.

Ist $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus, so definieren wir $F'(a) : T_a(X) \to T_{f(a)}(Y)$ durch

$$F'(a)v = v \circ F_a^*.$$

Erklärt man $v(f) = v(f_a)$ für $f : U \to K$, so erhält man eine Derivation $\mathcal{S}(U) \to K$.

Ist U eine offene Teilmenge eines Vektorraums X, so kann man jedem Vektor $v \in X$ einen Tangentialvektor $v_a \in T_a(U)$ zuordnen: $v_a(f)$ ist die Richtungsableitung von f nach v an der Stelle a. Aus der Differentialgeometrie ist bekannt, dass dies einen Isomorphismus $X \cong T_a(U)$ definiert.

Die Abbildung $F'(a)$, auch mit $T_a(F)$ oder d_aF bezeichnet, ist K-linear. Für Morphismen gilt die Kettenregel $(F \circ G)'(a) = F'(G(a))G'(a)$. Ist F ein Isomorphismus, so also auch $F'(a)$. Folglich ist $\dim T_a(X) = \dim X$.

Definition 10 *Ein Morphismus F von Mannigfaltigkeiten heißt Immersion (bzw. Submersion), wenn $F'(a)$ für alle a injektiv (bzw. surjektiv) ist.*

Satz 7 (Rangsatz) *Ist $F(X,\mathcal{S}) \to (Y,\mathcal{T})$ ein Morphismus und hat F' konstanten Rang r, so gibt es für beliebiges $a \in X$ Karten $\varphi : U \to K^m$ von X und $\psi : V \to K^n$ von Y mit $\varphi(a) = 0$, $\psi(F(a)) = 0$ und*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Beweis. Wir können annehmen, dass X und Y offene Teilmengen in K^m bzw. K^n sind und $a = 0$, $F(a) = 0$. Wir schreiben als Zeilenvektor[1] $F(x) = (G(x), H(x))$ mit $G(x) \in K^r$ und $H(x) \in K^{n-r}$ sowie $x = (u, v)$ mit $u \in K^r$, $v \in K^{m-r}$. Durch Vertauschen der Koordinaten können wir erreichen, dass $\det \partial_u G(0)$ nicht verschwindet. Die Abbildung

$$\varphi(u, v) = (G(u, v), v)$$

hat die Jacobimatrix

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \partial_u G & \partial_v G \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

die an der Stelle $0 \in K^m$ umkehrbar ist. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist der Morphismus φ in einer Umgebung dieser Stelle umkehrbar. Mit der Bezeichnung $P(u, v) = u$ ist

$$P \circ F = G = P \circ \varphi,$$

also gibt es einen Morphismus N, so dass

$$F \circ \varphi^{-1}(u, v) = (u, N(u, v)).$$

Die Jacobimatrix von $F \circ \varphi^{-1}(u, v)$ ist

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ \partial_u N & \partial_v N \end{pmatrix}.$$

Da sie den Rang r hat, muss $\partial_v N = 0$ sein. Also hängt $N(u, v)$ in einer konvexen Umgebung von 0 nicht von der Komponente v ab. Setzen wir für $u \in K^r$ und $w \in K^{n-r}$

$$\psi(u, w) = (u, w - N(u)),$$

so ist ψ in der Umgebung von $0 \in K^n$ ein umkehrbarer Morphismus, und

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(u, v) = (u, 0).$$

□

Um Pathologien zu vermeiden, verwendet man das den Begriff „Mannigfaltigkeit“ meist im Sinne von „Hausdorffsche Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis der Topologie“.

[1] Eigentlich müssten wir mit Spaltenvektoren arbeiten, wann immer Jacobimatrizen auftauchen.

5 Untermannigfaltigkeiten

Definition 11 *Für jede offene Teilmenge U eines topologischen Raumes X sei eine Menge $\mathcal{P}$ von Funktionen auf U mit Werten in K gegeben. Die Zuordnung $\mathcal{P}$ heißt Funktionenprägarbe, wenn für beliebige offene Mengen $V \subset U$ in X gilt: Ist $f \in \mathcal{P}(U)$, so ist $f|_V \in \mathcal{P}(V)$.*

Morphismen und Bilder von Funktionenprägarben sind wie für Funktionengarben definiert.

Ist $\mathcal{P}$ eine Funktionenprägarbe auf X und Z eine beliebige Teilmenge von X, so definieren wir eine Prägarbe $\mathcal{Q} = \mathcal{P}|_Z$ auf Z (mit der induzierten Topologie) wie folgt. Für eine offene Menge W in Z besteht $\mathcal{Q}(W)$ aus allen Funktionen $h : W \to K$, für die es eine offene Menge U in X und eine Funktion $f \in \mathcal{P}(U)$ gibt, so dass $U \cap Z = W$ und $f|_W = h$.

Man überzeugt sich leicht, dass $\mathcal{P}|_Z$ wieder eine Funktionenprägarbe ist.

Lemma 3 *Es sei $\mathcal{P}$ eine Funktionenprägarbe auf X. Für jede offene Menge U sei $\mathcal{S}(U)$ die Menge aller Funktionen $f : U \to K$, für die eine Familie offener Mengen $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ existiert, so dass*

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

und $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{P}(U_\alpha)$ für jedes $\alpha \in A$ ist. Dann ist $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe, und zwar die kleinste Funktionengarbe, die $\mathcal{P}$ enthält.

Beweis als Aufgabe 7.

Definition 12 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge Z von X heißt Untermannigfaltigkeit, wenn Z mit der induzierten Topologie und der Funktionengarbe $\mathcal{U}$, welche der Funktionenprägarbe $\mathcal{S}|_Z$ zugeordnet ist, eine Mannigfaltigkeit ist.*

Beispiel. Z offen in X, $\mathcal{U} = \mathcal{S}|_Z$.

Satz 8 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge Z von X ist genau dann m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es für jeden Punkt $a \in Z$ eine Karte $\varphi : U \to K^n$ von $(X, \mathcal{S})$ gibt, so dass $a \in U$ und*

$$\varphi(U \cap Z) = \varphi(U) \cap K^m$$

ist, wobei wir die Standardeinbettung von K^m in K^n benutzen.

Beweis. Es sei $(Z,\mathcal{U})$ eine Untermannigfaltigkeit und $a \in Z$. Für einen gegebenen Keim $h_a \in \mathcal{U}_a$ wählen wir einen Repräsentanten $h \in \mathcal{U}(W)$. Die Funktionengarbe $\mathcal{U}$ ergibt sich aus $\mathcal{S}|_Z$ nach der Konstruktion in Lemma 3. Nach Verkleinerung von W können wir darum annehmen, dass $h \in \mathcal{S}|_Z(W)$. Nach der Definition dieser Funktionenprägarbe gibt es ein offenes U in X mit $U \cap Z = W$ und ein $f \in \mathcal{S}(U)$ mit $f|_W = h$. Nach Definition ist $i^*(f) = h$ und darum $i^*(f_a) = h_a$. Also ist $i_a^* : \mathcal{S}_a \to \mathcal{U}_a$ surjektiv, und die Abbildung $i'(a) : T_a(Z) \to T_a(X)$ ist injektiv. Dies gilt für alle Punkte von Z, d. h. i ist eine Immersion.

Nach Satz 7 gibt es Karten $\varphi : U \to K^n$ von X und $\psi : W \to K^m$, so dass $\varphi(a) = \psi(a) = 0$ und

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

für $x \in \psi(W)$. Wir halten W fest und verkleinern U, so dass $\varphi(U) \subset \psi(W) \times K^{n-m}$ und $U \cap Z = W$, was möglich ist, weil φ stetig und W in der induzierten Topologie von Z offen ist. Dann hat die Karte (U, φ) die geforderte Eigenschaft.

Die Umkehrung ist leicht zu beweisen. □

Satz 9 *Ist $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus mit konstantem Rang und $b \in F(X)$, so ist $F^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $(X, \mathcal{S})$.*

Dies folgt leicht aus den Sätzen 7 und 8.

6 Die Grassmann-Algebra

Definition 13 *Es sei V ein K-Vektorraum und $p \in \mathbb{N}$. Eine multilineare p-Form $V^p \to K$ heißt alternierend, wenn sich ihr Wert bei der Vertauschung zweier beliebiger Argumente mit -1 multipliziert.*

Man verlangt keine Linearität von Null-Formen $V^0 = \{0\} \to K$, damit das Produkt einer p-Form und einer q-Form immer eine $p+q$-Form ist. Null-Formen (Elemente von K) und Eins-Formen (Linearformen) sind automatisch alternierend.

(Alternierende) Multilinearformen hängen eng mit folgenden Begriffen zusammen.

Definition 14 *Die Tensoralgebra eines Vektorraums ist die direkte Summe*

$$T(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(V),$$

wobei

$$T^p(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p \text{ mal}}.$$

Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V, so ist

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \mid (i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p\}$$

eine Basis von $T^p(V)$. Dieselbe Konstruktion ist auf den Dualraum von V anwendbar. Elemente $l \in V^* = T^1(V^*)$ sind Linearformen auf V, und allgemeiner kann man jedes Element von $T^p(V^*)$ als multilineare p-Form auf V auffassen, so dass

$$\tau \otimes \tau''(v_1, \ldots, v_{p'+p''}) = \tau'(v_1, \ldots, v_{p'})\tau''(v_{p'+1}, \ldots, v_{p'+p''}). \tag{4}$$

Ist V endlichdimensional, so erhält man alle Multilinearformen auf diese Weise.

Definition 15 *Die Grassmann-Algebra eines Vektorraums ist*

$$\bigwedge(V) = T(V)/I,$$

wobei I das von den Elementen der Form $x \otimes x$ erzeugte zweiseitige Ideal ist. Die Multiplikation in dieser Algebra wird mit $\wedge$ bezeichnet.

Satz 10 *(i) Die Graduierung von $T(V)$ induziert eine Graduierung*

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^p(V).$$

(ii) Für $\omega \in \bigwedge^p(V^*)$ und $\psi \in \bigwedge^q(V^*)$ gilt

$$\omega \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \omega.$$

(iii) Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V, so bilden die Elemente $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ mit $i_1 < \cdots < i_p$ eine Basis von $\bigwedge^p(V)$. Insbesondere ist $\bigwedge^p(V) = \{0\}$ für $p > n$.

Beweis. (i) Setzen wir $I^p = I \cap T^p(V)$, so gilt $I = \bigoplus_{p=0}^{\infty} I^p$, weil die erzeugenden Elemente homogen sind. Also gilt unsere Behauptung mit $\bigwedge^p(V) = T^p(V)/I^p$.

(ii) Für v, $w \in V$ gilt

$$v \otimes w + w \otimes v = (v + w) \otimes (v + w) - v \otimes v - w \otimes w \in I,$$

also $v \wedge w + w \wedge v = 0$. Der allgemeine Fall folgt durch Induktion.

(iii) Die Bilder der o. g. Basiselemente von $T(V)$ in $\bigwedge(V)$ verschwinden oder stimmen bis auf das Vorzeichen mit den angegebenen Elementen überein, welche somit $\bigwedge(V)$ aufspannen. Ihre lineare Unabhängigkeit werden wir im Zusammenhang mit dem nächsten Satz beweisen. □

Satz 11 *Für $\tau \in T^p(V^*)$ sei*

$$\tau_{\mathrm{alt}} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\pi) \tau^\pi,$$

wobei

$$\tau^\pi(v_1, \dots, v_p) = \tau(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)})$$

(i) Für endlichdimensionales V definiert dies einen Isomorphismus von $\bigwedge(V^*)$ auf den Vektorraum der alternierenden Multilinearform auf V. (Wir werden darum Elemente der Grassmannalgebra mit alternierenden Multilinearformen identifizieren.)

(ii) Für $\tau' \in T^{p'}(V^*)$ und $\tau'' \in T^{p''}(V^*)$ gilt

$$\tau' \wedge \tau'' = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p'} \times \mathfrak{S}_{p''} \backslash \mathfrak{S}_{p'+p''}} \operatorname{sgn}(\pi)(\tau'_{\mathrm{alt}} \otimes \tau''_{\mathrm{alt}})^\pi.$$

(Genaugenommen sind auf der linken Seite die Äquivalenzklassen $[\tau'] \in \bigwedge^{p'}(V^*)$ und $[\tau''] \in \bigwedge^{p''}(V^*)$ gemeint, während die rechte Seite im Sinne von Gleichung (4) zu verstehen ist.)

(iii) Für $l_1, \dots, l_p \in V^*$ und $v_1, \dots, v_p \in V$ ist

$$l_1 \wedge \dots \wedge l_p(v_1, \dots, v_p) = \det A,$$

wobei die Matrix A die Einträge $a_{ij} = l_i(v_j)$ hat.

Beweis. (i) Es gilt $(\tau^\sigma)^\pi = \tau^{\sigma\pi}$ für beliebige $\sigma, \pi \in \mathfrak{S}_p$, also ist $\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_p} \tau^\pi$ eine alternierende p-Form. Das Ideal I wird offensichtlich auf Null abgebildet. Ist $l_1, \dots, l_n$ die duale Basis zu $e_1, \dots, e_n$, so stellt man durch Einsetzen fest, dass die Elemente $l_{i_1} \wedge \dots \wedge l_{i_p}$ für $i_1 < \dots < i_p$ linear unabhängig sind. Dies vervollständigt auch den Beweis von Satz 10(iii), wo wir gesehen haben, dass diese Elemente die Grassmann-Algebra aufspannen.

(ii) Setzen wir auf der rechten Seite die Definition von τ'_{alt} und τ''_{alt} ein, beachten $\operatorname{sgn}(\pi'\pi'') = \operatorname{sgn}(\pi')\operatorname{sgn}(\pi'')$ und vereinigen die Summationen, so folgt die Behauptung.

(iii) Nach der Verallgemeinerung von (ii) auf p Faktoren ist die linke Seite gleich

$$\sum_{\pi \in \mathcal{S}_p} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{p} l_i(v_{\pi(i)}),$$

und nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz ist dies gleich der rechten Seite. □

Wir werden alternierende Multilinearformen mit Elementen der Grassmannalgebra identifizieren, so dass wir sie mittels $\wedge$ multiplizieren können.

7 Vektorfelder und Differentialformen

Definition 16 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld v auf einer offenen Menge U in X ist eine Familie von Derivationen $v : \mathcal{S}(U') \to \mathcal{S}(U')$ für alle offenen Teilmengen U' von U, so dass $v(f|_{U''}) = v(f)|_{U''}$ gilt für $f \in \mathcal{S}(U')$ und U'' offen in U'.*

Wir erinnern daran, dass die Derivationseigenschaft bedeutet, dass

$$v(fg) = v(f)g + fv(g).$$

Berechnen wir beide Seiten an einer Stelle $a \in U$, so sehen wir, dass $v_a : f_a \mapsto v(f)(a)$ ein Tangentialvektor ist. Es ist klar, dass ein Vektorfeld v auf U durch die Familie der Tangentialvektoren v_a mit $a \in U$ eindeutig bestimmt ist. Wir erinnern, dass der Kommutator $[v, w] = v \circ w - w \circ v$ zweier Vektorfelder wieder ein Vektorfeld ist.

Beispiel. Ist X ein affiner Raum, V der Vektorraum der Translationen von X und U offen in X, so definiert jede glatte (bzw. holomorphe) Abbildung $U \to V$, $a \mapsto v_a$, ein glattes (bzw. holomorphes) Vektorfeld auf U, nämlich $v(f)(a) = \partial_{v_a} f(a)$. Jedes Vektorfeld auf U entsteht auf diese Weise.

Definition 17 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit, U offen in X und $p \in \mathbb{N}$. Eine alternierende Differentialform der Stufe p ist eine Familie von alternierenden multilinearen Abbildungen*

$$\omega_a : T_a(X)^p \to K, \qquad a \in U,$$

so dass für jede offene Teilmenge U' von U und Vektorfelder $v_1, \ldots, v_p$ auf U' die Funktion

$$\omega(v_1, \ldots, v_p) : a \mapsto \omega_a((v_1)_a, \ldots, (v_p)_a)$$

zu $\mathcal{S}(U')$ gehört. Wir bezeichnen den $\mathcal{S}(U)$-Modul der alternierenden Differentialformen der Stufe p auf U mit $\mathcal{S}^p(U)$ und führen die $\mathcal{S}(U)$-Algebra $\mathcal{S}^\bullet(U) = \bigoplus_{p=0}^{\dim X} \mathcal{S}^p(U)$ ein.

Beispiel 1. Natürlich ist $\mathcal{S}^0(U) = \mathcal{S}(U)$. Eine Differentialform $\omega \in \mathcal{S}^1(U)$ heißt auch Pfaffsche Form oder Kovektorfeld, denn ω_a ist ein Kotangentialvektor, d. h. ein Element des Dualraums $T_a^*(X)$ von $T_a(X)$. Für jede Funktion $f \in \mathcal{S}(U)$ ist durch $df(v) = v(f)$ eine Pfaffsche Form $df \in \mathcal{S}^1(U)$ definiert. Aus Definition 16 folgt

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg \tag{5}$$

für $f,\, g \in \mathcal{S}(U)$. Ist $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten, so gilt für $g \in \mathcal{T}(V)$ und $v \in T_a(X)$, dass

$$d(F^*(g))_a(v) = v(F^*(g)_a) = (F'(a)v)g_{F(a)} = dg_{F(a)}(F'(a)v) = F^*(dg)_{F(a)}(v),$$

also

$$d(F^*(g)) = F^*(dg). \tag{6}$$

Lemma 4 *Ist (U, φ) eine Karte von $(X, \mathcal{S})$ und sind die lokalen Koordinaten $x_i : U \to K$ definiert durch $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$, so ist jedes $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$ von der Form*

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \tag{7}$$

mit $f_{i_1,\ldots,i_p} \in \mathcal{S}(U)$. Ist umgekehrt eine Familie $\omega_a \in T_a(X)^p \to K$ für a in einer offenen Teilmenge V von X gegeben und ist für jede Karte (U, φ) eines Atlasses von $(V, \mathcal{S}|_V)$ die Einschränkung $\omega|_U$ von der angegebenen Form, so ist $\omega \in \mathcal{S}^p(V)$.

Beweis. Es sei $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$. Wir können annehmen, dass $X = K^n$. Da die Kovektoren $(dx_1)_a$, $\ldots$, $(dx_n)_a$ eine Basis von $T_a^*(X)$ bilden, können wir Satz 10(iii) anwenden. Wegen

$$\omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) = f_{i_1,\ldots,i_p}$$

folgt die Glattheit der Koeffizienten.

Umgekehrt habe ω in jeder Karte eines Atlasses von $(V, \mathcal{S}|_V)$ die angegebene Form. Sind v_1, $\ldots$, v_p Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge V' von V, so ist $\omega(v_1, \ldots, v_p)|_{V' \cap U} \in \mathcal{S}(V' \cap U)$ für jede Karte (U, φ) des Atlasses. Aufgrund der Garbeneigenschaft von $\mathcal{S}$ folgt $\omega(v_1, \ldots, v_p) \in \mathcal{S}(V)$. $\square$

Beispiel 2. Eine Differentialform μ der Stufe $n = \dim X$ heißt Volumenform. Für jedes $B \in \operatorname{End}(T_a(X))$ folgt aus Satz 11(iii), dass

$$\mu_a(Bv_1, \ldots, Bv_n) = \det(B)\mu_a(v_1, \ldots, v_n)$$

Ist $\mu \in \mathcal{S}^n(U)$ eine nichtverschwindende Volumenform, so ist jede andere Volumenform auf U von der Form $f\mu$ für ein $f \in \mathcal{S}(U)$, und im reellen Fall ist dann $|\mu|$ eine nichtverschwindende glatte Dichte. In einer Karte (U, φ) ist nämlich

$$\mu|_U = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

und für nichtverschwindendes $f \in \mathcal{E}(U)$ ist $|f| \in \mathcal{E}(U)$.

Satz 12 *Es sei $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten. Für $\omega \in \mathcal{T}^p(V)$ definieren wir $F^*(\omega)$ durch*

$$F^*(\omega)_a(v_1, \ldots, v_p) = \omega_{F(a)}(F'(a)v_1, \ldots, F'(a)v_p).$$

Dann erhalten wir eine Familie von Ringhomomorphismen $F^* : \mathcal{T}^\bullet(V) \to \mathcal{S}^\bullet(F^{-1}(V))$, welche den Rücktransport $F^* : \mathcal{T}(V) \to \mathcal{S}(V)$ fortsetzt und die Eigenschaft $F^*(\omega|_{V'}) = F^*(\omega)|_{F^{-1}(V)}$ für $V' \subset V$ hat.

Beweis. Die Abbildung F^* ist durch eine Familie von Abbildungen $F_a^* : \bigwedge^p(T^*_{F(a)}(Y) \to \bigwedge^p(T_a(X))$ gegeben, die nach Satz 11(ii) verträglich mit dem äußeren Produkt ist.

Es bleibt zu prüfen, dass für Vektorfelder $v_1, \ldots, v_p$ auf $F^{-1}(V)$ die Funktion $F^*(\omega)(v_1, \ldots, v_p)$ zu $\mathcal{S}(F^{-1}(V))$ gehört. Ist $\omega = dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_p$ mit $g_j \in \mathcal{T}(V)$, so folgt dies aus Gleichung (6) und der Tatsache, dass F^* ein Ringhomomorphismus ist. Jede Differentialform ist lokal eine Linearkombination von Produkten dieser Art, also folgt die Behauptung aus der Garbeneigenschaft von $\mathcal{S}$. $\square$

Satz 13 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit. Die Familie von linearen Abbildungen $d : \mathcal{S}(U) \to \mathcal{S}^1(U)$ für U offen in X setzt sich auf eindeutige Weise zu einer Familie von linearen Abbildungen $d : \mathcal{S}^\bullet(U) \to \mathcal{S}^\bullet(U)$ mit folgenden Eigenschaften fort:*

(a) Für offene $V \subset U$ und $\omega \in \mathcal{S}^\bullet(U)$ gilt $d(\omega|_V) = d\omega|_V$,

(b) für offene U gilt $d(\mathcal{S}^p(U)) \subset \mathcal{S}^{p+1}(U)$,

(c) $d \circ d = 0$,

(d) für offene U und $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$, $\psi \in \mathcal{S}^q(U)$ gilt

$$d(\omega \wedge \psi) = d\omega \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge d\psi.$$

Ist $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten, so gilt

$$d \circ F^* = F^* \circ d. \tag{8}$$

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall, dass die Menge U zu einer Karte (U, φ) gehört. Dann hat $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$ die Form (7). Falls d existiert, so folgt aus der Linearität und den Eigenschaften (c) und (d), dass

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}, \tag{9}$$

wobei wir $\sum_I$ für die Summe über die Multiindizes $I = (i_1, \ldots, i_p)$ mit $i_1 < \cdots < i_p$ schreiben. Somit ist d eindeutig bestimmt. Wir nehmen also Gleichung (9) als Definition. Die Eigenschaften (a) und (b) sowie die Linearität sind dann offensichtlich erfüllt.

Um (c) nachzuprüfen, müssen wir zunächst (9) in der Form (7) schreiben, nämlich

$$d\omega = \sum_I \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

(Die partiellen Ableitungen sind so gemeint, dass f_I mittels φ als Funktion auf $\varphi(U) \subset K^n$ interpretiert wird.) Um hierauf wiederum die Definition (9) anwenden zu können, müssen die Indizes der Differentiale aufsteigend geordnet sein. Unter Verwendung von Satz 10(ii) können wir den Faktor dx_j an der richtigen Stelle einordnen. Machen wir nach Anwendung von (9) die Vertauschung rückgängig, so verschwindet der Faktor ± 1 wieder, und wir erhalten

$$d(d\omega) = \sum_I \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

Fassen wir jeweils zwei Terme der inneren Doppelsumme mit vertauschten j und k zusammen, so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^2 f_I}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_j \partial x_k} \right) dx_k \wedge dx_j,$$

was nach dem Satz von Schwartz verschwindet.

Um Eigenschaft (d) nachzuprüfen, schreiben wir auch $\psi \in \mathcal{S}^q(U)$ in der Form (7), d. h.

$$\psi = \sum_J g_J dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}.$$

Nach Definition (9) und der Identität (5) gilt

$$d(\omega \wedge \psi) = \sum_{I,J} (df_I \cdot g_J + f_I \cdot dg_J) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}.$$

Nach Ausmultiplizieren der inneren Klammer können wir im ersten Term den skalaren Faktor g_J hinter die Faktoren dx_{i_k} schreiben, während im zweiten Term die 1-Form dg_J bei Vertauschung mit jedem dieser p Faktoren nach Satz 10(ii) einen Vorzeichenwechsel hervorruft. Dadurch ergibt sich Eigenschaft (d).

Wir sehen also, dass für eine Karte (U, φ) genau eine Familie $d = d_\varphi$ von Abbildungen mit den angegebenen Eigenschaften existiert. Ist U' offen in U, so erhalten wir durch Einschränkung von d_φ die entsprechende Familie für $\varphi|_{U'}$. Ist also $a \in X$ und $\omega \in \mathcal{S}^\bullet(V)$, so hängt

$$(d\omega)_a = (d_\varphi \omega)_a$$

nicht von der Wahl der Karte (U, φ) mit $a \in U \subset V$ ab. Mit der Garbeneigenschaft von $\mathcal{S}$ beweist man leicht, dass $d\omega \in \mathcal{S}^\bullet(V)$, und die Eigenschaften (a)–(d) übertragen sich.

Nun sei $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus, V offen in Y und $F(a) \in V$. Gleichung (8) gilt nach Gleichung (6) bereits auf $\mathcal{T}^0(V)$. Da die Behauptung lokal ist, können wir die Umgebung V von $F(a)$ verkleinern, so dass jedes Element von $\mathcal{T}^q(V)$ eine Linearkombination von Elementen der Form $\psi \wedge dg$ ist. Aus dem Bewiesenen und Satz 12 folgt

$$d(F^*(\psi \wedge dg)) = d(F^*(\psi) \wedge F^*(dg)) = d(F^*(\psi) \wedge d(F^*(g))) = d(F^*(\psi)) \wedge d(F^*(g)).$$

Andererseits ist

$$F^*(d(\psi \wedge dg)) = F^*(d\psi \wedge dg) = F^*(d\psi) \wedge F^*(dg).$$

Da wir induktiv annehmen können, dass (8) für ψ bereits gilt, folgt die Gleichheit beider Ausdrücke. □

Satz 14 *Sind $v_0, \ldots, v_p$ Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge U einer Mannigfaltigkeit und ist $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$, so gilt*

$$d\omega(v_0, \ldots, v_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i v_i(\omega(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_p)) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([v_i, v_j], v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_p),$$

wobei Argumente mit einem Dach wegzulassen sind.

Beweis. Wir behaupten, dass beide Seiten $\mathcal{S}(U)$-multilinear von den $p+1$ Argumenten abhängen. Die Additivität ist klar. Ersetzen wir nun z. B. v_0 durch fv_0 mit $f \in \mathcal{S}(U)$, so multipliziert sich die linke Seite mit f. Auf der rechten Seite entstehen wegen der Leibnizregel und der Formel

$$[fv, gw] = fg\,[v,w] + f\,v(g)\,w - g\,w(f)\,v$$

zusätzlich die Terme

$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^i v_i(f)\,\omega(v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_p)) - \sum_{j=1}^{p}(-1)^j v_j(f)\,\omega(v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_p)),$$

die sich aber wegkürzen.

Da es genügt, die behauptete Gleichung in einer beliebigen Karte zu beweisen, können wir uns zudem auf den Fall beschränken, dass die Vektorfelder v_k gleich $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}$ sind. In diesem Fall verschwinden die Kommutatoren $[v_i, v_j]$. Man kann auch leicht nachprüfen, dass beide Seiten der Gleichung alternierend in den v_k sind, also können wir annehmen, dass $i_0 < \cdots < i_p$. Schreiben wir ω in der Form (7), so sind beide Seiten gleich $\sum_{k=0}^{p} \partial_{i_k} f_{i_0,\ldots,\widehat{i_k},\ldots,i_p}$. □

8 Lie-Ableitungen und der Satz von Stokes

In diesem Abschnitt betrachten wir nur reelle Mannigfaltigkeiten. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen benötigen wir folgenden Satz.

Satz 15 *Es sei U offen in der reellen Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{S})$ und v ein Vektorfeld auf U.*

(i) Es gibt eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R} \times U$ und einen Morphismus $\varphi : W \to U$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $a \in U$ ist $\varphi(0,a) = a$, und die Menge $\{t \in \mathbb{R} \mid (t,a) \in W\}$ ist ein offenes Intervall, auf dem für jedes $f \in \mathcal{S}(U)$ gilt

$$\frac{\partial f(\varphi(t,a))}{\partial t} = v(f)(\varphi(t,a)). \tag{10}$$

(ii) Hat $(\tilde{W}, \tilde{\varphi})$ dieselben Eigenschaften wie (W, φ), so stimmen φ und $\tilde{\varphi}$ auf $W \cap \tilde{W}$ überein.

(iii) Bezeichnen wir $W_t = \{x \in U \mid (x,t) \in W\}$ und $\varphi_t(x) = \varphi(t,x)$, so ist $\varphi_t : W_t \to U$ eine offene Einbettung.

(iv) Für s, $t \in \mathbb{R}$ gilt auf $\varphi_t^{-1}(W_s) \cap W_{s+t}$

$$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}.$$

Man nennt die Familie der offenen Einbettungen φ_t den Fluss mit dem Geschwindigkeitsfeld v. Werten wir die Gleichung (10) an der Stelle $t = 0$ aus, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*(f)|_{t=0} = v(f).$$

Definition 18 *Ist v ein Vektorfeld auf U, so ist die Lie-Ableitung von $\omega \in \mathcal{S}^\bullet(U)$ bezüglich v gegeben durch*

$$\mathcal{L}_v\omega = \frac{d}{dt}\varphi_t^*(\omega)|_{t=0},$$

wobei φ den Fluss mit dem Geschwindigkeitsfeld v bezeichnet. Ist w ein weiteres Vektorfeld auf U, so ist seine Lie-Ableitung bezüglich v gegeben durch

$$\mathcal{L}_v w = \frac{d}{dt}(\varphi_t')^{-1}w|_{t=0}.$$

Man beachte, dass $\varphi_t'(a) : T_a(X) \to T_{\varphi_t(a)}(X)$ invertierbar ist, da φ_t eine offene Einbettung ist. Man kann die Grenzwerte auf der rechten Seite in einem gegebenen Punkt $a \in U$ jeweils in einem endlichdimensionalen Raum berechnen. Aus der Leibnizregel folgt unmittelbar, dass

$$\mathcal{L}_v(\omega \wedge \psi) = \mathcal{L}_v\omega \wedge \psi + \omega \wedge \mathcal{L}_v\psi.$$

Lemma 5 *Für Vektorfelder v, w auf U gilt*

$$\mathcal{L}_v w = [v, w].$$

Beweis. Nach Definition des Pullback ist

$$\varphi^*(w(f)) = \big((\varphi_t')^{-1}w\big)\big(\varphi_t^*(f)\big).$$

Differentiation ergibt mit der Leibnizregel

$$\mathcal{L}_v(w(f)) = (\mathcal{L}_v w)(f) + w(\mathcal{L}_v f),$$

woraus die Behauptung sofort folgt. □

Satz 16 *Sind $v_1, \ldots, v_p$ und v Vektorfelder auf U und $\omega \in \mathcal{S}^\bullet(U)$, so gilt*

$$(\mathcal{L}_v\omega)(v_1, \ldots, v_p) = v(\omega(v_1, \ldots, v_p)) - \sum_{i=1}^{p} \omega(v_1, \ldots, [v, v_i], \ldots, v_p).$$

Beweis. Nach Definition des Pullback ist

$$\varphi_t^*(\omega(v_1, \ldots, v_p)) = \varphi_t^*(\omega)((\varphi_t')^{-1}v_1, \ldots, (\varphi_t')^{-1}v_p).$$

Differentiation ergibt mit der Leibnizregel

$$\mathcal{L}_v(\omega(v_1, \ldots, v_p)) = (\mathcal{L}_v\omega)(v_1, \ldots, v_p) + \sum_{i=1}^{p} \omega(v_1, \ldots, \mathcal{L}_v v_i, \ldots, v_p),$$

woraus die Behauptung mit Lemma 5 sofort folgt. □

Definition 19 *Für ein Vektorfeld v auf U und $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$ definieren wir $\iota_v\omega \in \mathcal{S}^{p-1}(U)$ durch*

$$\iota_v\omega(v_2, \ldots, v_p) = \omega(v, v_2, \ldots, v_p).$$

Natürlich ist $\iota_v f = 0$ für $f \in \mathcal{S}^0(U)$. Man prüft leicht nach, dass für $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$ und $\psi \in \mathcal{S}^q(U)$ gilt

$$\iota_v(\omega \wedge \psi) = \iota_v\omega \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge \iota_v\psi.$$

Satz 17 (Cartan-Formeln) *Für Vektorfelder v und w auf U gilt*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \circ \iota_w - \iota_w \circ \mathcal{L}_v &= \iota_{[v,w]}, \\ \mathcal{L}_v &= \iota_v \circ d + d \circ \iota_v. \end{aligned}$$

Beweis. Sind v_1, ..., v_p weitere Vektorfelder auf U und ist $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$, $p > 0$, so gilt nach Satz 16

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v(\iota_{v_1}\omega)(v_2, \ldots, v_p)) &= v(\iota_{v_1}\omega(v_2, \ldots, v_p)) - \sum_{i=2}^{p} (\iota_{v_1}\omega)(v_2, \ldots, [v, v_i], \ldots, v_p) \\ &= v(\omega(v_1, \ldots, v_p)) - \sum_{i=2}^{p} \omega(v_1, \ldots, [v, v_i], \ldots, v_p). \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} (\iota_{v_1}(\mathcal{L}_v\omega))(v_2, \ldots, v_p) &= (\mathcal{L}_v\omega)(v_1, \ldots, v_p) \\ &= v(\omega(v_1, \ldots, v_p)) - \sum_{i=1}^{p} \omega(v_1, \ldots, [v, v_i], \ldots, v_p). \end{aligned}$$

Daraus folgt Behauptung (i). Nach Satz 14 gilt

$$
\begin{aligned}
(\iota_v d\omega)(v_1,\dots,v_p) &= d\omega(v,v_1,\dots,v_p) \\
&= v(\omega(v_1,\dots,v_p)) + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i v_i(\omega(v,v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_p)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p}(-1)^j \omega([v,v_j],v_1,\dots,\widehat{v_j},\dots,v_p) \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([v_i,v_j],v,\dots,\widehat{v_i},\dots,\widehat{v_j},\dots,v_p)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
(d\iota_v\omega)(v_1,\dots,v_p) &= \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1} v_i(\iota_v\omega(v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_p)) \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\iota_v\omega([v_i,v_j],v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,\widehat{v_j},\dots,v_p) \\
&= -\sum_{i=1}^{p}(-1)^i v_i(\omega(v,v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_p)) \\
&\quad - \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([v_i,v_j],v,v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,\widehat{v_j},\dots,v_p).
\end{aligned}
$$

Addieren wir beide Ausdrücke und bringen wir in der verbleibenden Summe über j das Argument $[v,v_j]$ an die $j$te Stelle, so erhalten wir genau die rechte Seite der Formel in Satz 16. □

Wir erinnern an den Begriff einer Dichte auf einer offenen Teilmenge U einer reellen Mannigfaltigkeit $(X,\mathcal{S})$. Für jedes $a \in U$ sei ein nichtverschwindendes translationsinvariantes Maß μ_a auf $T_a(X)$ gegeben. Dann bezeichnen wir mit $\mu_a(v_1,\dots,v_n)$ das Volumen des von Tangentialvektoren $v_1, \dots, v_n \in T_a(X)$ aufgespannten Parallelepipeds. Für $A \in \mathrm{End}(T_a(X))$ gilt dann

$$\mu_a(Av_1,\dots,Av_n) = |\det A|\,\mu_a(v_1,\dots,v_n).$$

Wir nennen die Familie μ eine stetige Dichte, wenn für Vektorfelder $v_1, \dots, v_n$ auf U die Funktion $\mu(v_1,\dots,v_n)$ stetig ist. Analog definiert man glatte bzw. analytische nichtverschwindende Dichten. Ist μ eine Dichte auf X mit kompaktem Träger, so wird das Integral

$$\int_X \mu$$

wie in der Analysis-Vorlesung definiert.

Eine Orientierung auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abbildung o von der Menge der Basen von V in die Menge $\{1, -1\}$, so dass für $A \in \mathrm{GL}(V)$ gilt

$$o(Av_1, \ldots, Av_n) = \operatorname{sgn}(\det A) o(v_1, \ldots, v_n).$$

Eine Orientierung o auf einer Mannigfaltigkeit ist eine Familie von Orientierungen o_a auf den $T_a(X)$, so dass für Vektorfelder $v_1, \ldots, v_n$ auf einer beliebigen offenen Teilmenge U die Funktion $o(v_1, \ldots, v_n)$ stetig (also lokal konstant) ist.

Ist o eine Orientierung und $f : X \to \{\pm 1\}$ lokal konstant, so ist auch fo eine Orientierung. Ist ω eine nichtverschwindende Volumenform, so ist $|\omega|$ eine Dichte. Ist ω zudem nichtverschwindend, so ist $\operatorname{sgn} \omega$ eine Orientierung. Ist ω eine Volumenform und o eine Orientierung, so ist $o\omega$ eine Dichte, und wir definieren

$$\int_{(X,o)} \omega = \int_X o\omega.$$

Auch für glatte Dichten kann man die Lie-Ableitung genau wie für Differentialformen definieren. Sie erfüllt das Analogon von Satz 12, und für nichtverschwindende Volumenformen ω gilt

$$\mathcal{L}_v(o\omega) = o\mathcal{L}_v\omega.$$

Definition 20 *Eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist ein Paar $(X, \mathcal{S})$, wobei X ein topologischer Raum und $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X ist, die lokal isomorph zu $(H, \mathcal{T})$ ist, wobei $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \leq 0\}$ und $\mathcal{T}$ die zu $\mathcal{E}|_H$ assoziierte Funktionengarbe ist.*

Satz 18 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und ∂X die Menge aller Punkte in X, die keine Umgebung U besitzen, so dass $(U, \mathcal{S}|_U)$ lokal isomorph zu $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ ist. Dann ist ∂X eine abgeschlossene Teilmenge, und wenn wir mit ∂S die zu $\mathcal{S}|_{\partial X}$ assoziierte Garbe bezeichnen, so ist $(\partial X, \partial S)$ eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit (ohne Rand).*

Man kann alle bisher für glatte Mannigfaltigkeiten gegebenen Konstruktionen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern. Eine Orientierung o auf X induziert eine Orientierung ∂o auf ∂X wie folgt. Ist $v \in T_a(X)$ ein äußerer Tangentialvektor im Punkt $a \in \partial X$, d. h. zeigt $\varphi'(a)v$ für eine Karte (U, φ) aus dem Halbraum H heraus, so ist ∂o_a die Einschränkung von $\iota_v o_a$ auf $T_a(\partial X)$.

Satz 19 (Gauß-Ostrogradski) *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine glatte Hausdorffsche Mannigfaltigkeit mit Rand, v ein glattes Vektorfeld und μ eine glatte Dichte auf X mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_X \mathcal{L}_v \mu = \int_{\partial X} \operatorname{sgn}_X(v) \iota_v \mu,$$

wobei

$$(\operatorname{sgn}_X v)(a) = \begin{cases} \pm 1, & \text{wenn } \pm v_a \text{ äußerer Vektor ist,} \\ 0, & \text{wenn } v_a \in T_a(\partial X). \end{cases}$$

Dieser Satz ist im Fall von Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ aus der Analysis-Vorlesung bekannt. Der Beweis im allgemeinen Fall ist analog: Man reduziert die Behauptung mit Hilfe einer Zerlegung der Eins auf den Fall eines Halbraums.

Satz 20 (Stokes) *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine glatte n-dimensionale Hausdorffsche Mannigfaltigkeit mit Rand, $\omega \in \mathcal{S}^{n-1}(X)$ mit kompaktem Träger und o eine Orientierung auf X. Dann gilt*

$$\int_{(X,o)} d\omega = \int_{(\partial X, \partial o)} \omega.$$

Auch diesen Satz kann man beweisen, indem man ihn mittels einer Zerlegung der Eins auf den Fall eines Halbraums zurückführt. Im Falle einer Mannigfaltigkeit mit Orientierung o ist Satz 19 eine Folgerung aus Satz 20. Setzen wir nämlich

$$\omega = \iota_v(o\mu) = \iota_v o \cdot \iota_v \mu,$$

so folgt wegen $d(o\mu) \in \mathcal{S}^{n+1}(X) = \{0\}$ aus Satz 17

$$d\omega = \mathcal{L}_v(o\mu) = o\mathcal{L}_v\mu,$$

und die Einschränkung von $\iota_v o$ auf ∂X ist $\operatorname{sgn}_X(v)\partial o$.

9 Faserbündel

Definition 21 *Eine stetige Abbildung $\pi : E \to X$ zwischen topologischen Räumen heißt Faserung[2] (und E mit dieser Struktur heißt Faserbündel[2] über X), wenn es einen topologischen Raum Z mit folgender Eigenschaft gibt: Für jeden Punkt $a \in X$ gibt es eine Umgebung U von a und einen Homöomorphismus $h : \pi^{-1}(U) \to U \times Z$, so dass $\pi|_{\pi^{-1}(U)} = p \circ h$, wobei $p : U \times Z \to U$ die natürliche Projektion bezeichnet.*

[2] genauer: lokal-triviale Faserung bzw. lokal-triviales Faserbündel

Man nennt X die Basis, E den Totalraum, $E_a = \pi^{-1}(\{a\})$ die Faser über a, Z die typische Faser und h eine lokale Trivialisierung. Es folgt aus der Definition, dass π surjektiv ist. Natürlich ist Z für jedes $a \in X$ zu E_a isomorph, also durch die Faserung bis auf Isomorphie bestimmt. Man könnte für jede lokale Trivialisierung eine eigene typische Faser Z wählen, vorausgesetzt, sie sind alle homöomorph.
Beispiel 1. Die natürliche Projektion $p : X \times Z \to X$ ist eine Faserung, genannt die triviale Faserung.

Angenommen, (U_α, h_α) und $U_\beta, h_\beta)$ sind Trivialisierungen. Dann ist

$$h_{\alpha\beta} = (h_\alpha|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}) \circ (h_\beta|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)})^{-1}$$

ein Homöomorphismus von $(U_\alpha \cap U_\beta) \times Z$ auf sich selbst mit $p \circ h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} \circ p$, also gibt es für jedes $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ einen Homöomorphismus $g_{\alpha\beta}(x) : Z \to Z$, so dass

$$h_{\alpha\beta}(x, z) = (x, g_{\alpha\beta}(x)z).$$

Offensichtlich gilt $g_{\alpha\alpha}(x) = \mathrm{id}_Z$, und ist (U_γ, h_γ) eine weitere Trivialisierung, so gilt für $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

$$g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)g_{\gamma\alpha}(x) = \mathrm{id}_Z .$$

Aus beiden Eigenschaften folgt

$$g_{\alpha\beta}(x)^{-1} = g_{\beta\alpha}(x), \qquad g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x).$$

Definition 22 *Ist $\pi : E \to X$ eine Faserung und gleichzeitig ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten, und gibt es eine Mannigfaltigkeit Z, so dass es in einer Umgebung eines jeden Punktes von X eine lokale Trivialisierung gibt, die ein Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten ist, so heißt E glattes bzw. analytisches bzw. holomorphes Faserbündel (je nach der Klasse der Morphismen).*

Beispiel 2. Es sei G eine Liesche Gruppe, H ihre abgeschlossene Liesche Untergruppe und $\pi : G \to X = G/H$ die natürliche Projektion. Wir versehen X mit der Quotiententopologie und der Funktionengarbe aller Funktionen, deren Pullback unter π zur Strukturgarbe von G gehört. Dann ist X bekanntlich eine Mannigfaltigkeit derselben Klasse wie G. Wir behaupten, dass π eine Faserung ebendieser Klasse ist. Für $a \in G$ können wir nämlich eine eine Untermannigfaltigkeit $V \subset G$ finden, so dass

$$T_a(G) = T_a(V) \dot{+} T_a(aH).$$

Dann ist die Produktabbildung

$$V \times H \to G$$

nach eventueller Verkleinerung von V eine offene Einbettung. Bezeichnen wir ihr Inverses mit h und das Bild von V in X mit U, so ist h eine lokale Trivialisierung über U.

Beispiel 3. Es sei V ein n-dimensionaler rechter H-Vektorraum, wobei H eine Divisionsalgebra über K ist, also $H \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{H}\}$. Weiter sei S die Stiefelmannigfaltigkeit der linear unabhängigen k-Tupel in V sowie G die Grassmannmannigfaltigkeit der k-dimensionalen H-Unterräume in V. Wir bezeichnen mit $\pi : S \to G$ die Abbildung

$$\pi(v_1, \ldots, v_k) = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle.$$

Die Mannigfaltigkeitsstruktur auf G haben wir in Aufgabe 8 gerade so definiert, dass π ein K-analytischer Morphismus ist. Wir behaupten, dass π eine K-analytische Faserung ist. Zur Konstruktion einer lokalen Trivialisierung halten wir einen $(n-k)$-dimensionalen H-Unterraum V_0 fest, betrachten

$$U := \{W \in G \mid W \cap V_0 = \{0\}\}$$

und bezeichnen mit Z die Menge aller Basen von V/V_0. Die Gruppe $\mathrm{GL}_k(H) = \mathrm{GL}_H(H^k)$ wirkt transitiv und frei auf Z und verwandelt Z in eine analytische K-Mannigfaltigkeit. Wir definieren h durch

$$h(v_1, \ldots, v_k) = (\langle v_1, \ldots, v_k \rangle, v_1 \bmod V_0, \ldots, v_k \bmod V_0).$$

Dann ist h eine lokale Trivialisierung.

Definition 23 *Ein H-Vektorbündel ist ein Faserbündel E mit der Struktur eines H-Vektorraums auf jeder Faser, für das es einen H-Vektorraum Z gibt, so dass es in der Umgebung eines beliebigen Punktes der Basis X eine lokale Trivialisierung gibt, die faserweise H-linear ist. Ist außerdem E ein glattes, analytisches bzw. holomorphes Faserbündel und kann man die linearen lokalen Trivialisierungen von der entsprechenden Klasse wählen, so spricht man von einem glatten, analytischen bzw. holomorphen Vektorbündel. Die Dimension von Z heißt Rang des Vektorbündels. Ein Vektorbündel vom Rang 1 heißt auch Geradenbündel.*

In diesem Fall sind die Übergangsfunktionen

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_H(Z)$$

stetige, glatte, analytische bzw. holomorphe Morphismen.

Beispiel 4. Das Tangentialbündel einer K-Mannigfaltigkeit X ist

$$T(X) = \bigsqcup_{a \in X} T_a(X).$$

Für jede offene Teilmenge U von X und Vektorfelder $v_1, \ldots, v_k$ auf U erhalten wir eine Abbildung $H : U \times K^k \to T(U)$,

$$H(a, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \lambda_1 \cdot (v_1)_a + \cdots + \lambda_k \cdot (v_k)_a.$$

Wir nennen eine Teilmenge U von $T(X)$ offen, wenn ihre Urbilder unter allen solchen Abbildungen H offen sind, und wir bezeichnen mit $\mathcal{T}(U)$ die Menge aller Funktionen $f : U \to K$, so dass $H^*(f)$ für alle H wie oben zur Strukturgarbe der Produktmannigfaltigkeit $U \times K^k$ gehört.

Lemma 6 *Mit dieser Topologie und der Funktionengarbe $\mathcal{T}$ ist $T(X)$ ein K-Vektorbündel über X von derselben Klasse wie X, und die Abbildungen $h = H^{-1}$ für Vektorfelder $v_1, \ldots, v_n$, die in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraumes bilden, sind lokale Trivialisierungen.*

Trivialisierungen wie im Lemma kann man sich mit Hilfe von Karten verschaffen. Sind (U, φ) und (V, ψ) Karten von X und schreiben wir $\varphi(a) = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\psi(a) = (y_1, \ldots, y_n)$, so können wir $v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $w_j = \frac{\partial}{\partial y_j}$ als punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf U bzw. V betrachten. Für die zugehörigen lokalen Trivialisierungen von $T(X)$ erhalten wir die Übergangsfunktionen $g : U \cap V \to \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$g_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}.$$

Beispiel 5. Wie in Beispiel 3 sei G die Grassmannmannigfaltigkeit der k-dimensionalen Unterräume im H-Vektorraum V. Wir definieren

$$E = \{(W, v) \in G \times V \mid v \in W\}$$

und bezeichnen mit $\pi : E \to G$ die natürliche Abbildung $\pi(W, v) = W$. Dann ist die Faser E_W natürlich isomorph zu W. Wir behaupten, dass E ein K-analytisches Vektorbündel über G ist, genannt das universelle Bündel über G. Wie in Beispiel 3 halten wir den $(n-k)$-dimensionalen Unterraum V_0 von V fest, setzen $U = \{W \in G \mid W \cap V_0 = \{0\}\}$ und definieren die Abbildung $h : \pi^{-1}(U) \to U \times (V/V_0)$ durch

$$h(W, v) = v \bmod V_0.$$

Dann ist h eine lokale Trivialisierung.

Definition 24 *Ein Morphismus von Faserbündeln (bzw. Faserungen)* $(E, X) \to (F, Y)$ *ist eine stetige Abbildung* $E \to F$*, so dass eine stetige Abbildung* $X \to Y$ *existiert, die das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

kommutativ macht.

Man erhält die Definition eines Morphismus von glatten, analytischen bzw. holomorphen Faserbündeln, indem man „stetige Abbildung“ durch„Morphismus von Mannigfaltigkeiten“ ersetzt.

Ein Morphismus $(E, X) \to (F, X)$ *von Faserbündeln über* X *ist ein Morphismus von Faserbündeln, bei dem obiges Diagramm durch die Abbildung* id_X *kommutativ gemacht wird.*

Ein Morphismus von Vektorbündeln ist ein Morphismus von Faserbündeln, der faserweise linear ist.

Wenn sich X *aus dem Zusammenhang ergibt, sagt man statt „Morphismus von Vektorbündeln über* X*“ auch kurz „Homomorphismus von Vektorbündeln“.*

Ist $f : E \to F$ ein Morphismus von Faserbündeln, so ist die unterliegende Abbildung $g : X \to Y$ eindeutig bestimmt, weil die Projektion $E \to X$ surjektiv ist. Ausserdem folgt

$$f(E_a) \subset F_{g(a)}.$$

Beispiel 6. Ist $g : X \to Y$ ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten, so erhalten wir einen Morphismus $T(g) : T(X) \to T(Y)$, dessen Einschränkung auf einen Tangentialraum durch $f'(a)$ gegeben ist. Damit wird T zu einem Funktor aus der Kategorie der glatten, analytischen bzw. holomorphen Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der glatten, analytischen bzw. holomorphen Vektorbündel.

Satz 21 *Es sei* $\rho : F \to Y$ *eine Faserung und* $g : X \to Y$ *stetig. Dann gibt es eine Faserung* $\pi_0 : E_0 \to X$ *und einen Morphismus* $f_0 : (E_0, X) \to (F, Y)$ *von Faserungen mit der Eigenschaft*

$$\rho \circ f_0 = g \circ \pi_0,$$

so dass für jede Faserung $\pi : E \to X$ *und jeden Morphismus* $f : (E, X) \to (F, Y)$ *von Faserungen mit der Eigenschaft*

$$\rho \circ f = g \circ \pi$$

genau ein Morphismus $e : (E, X) \to (E_0, X)$ von Faserungen über X existiert, so dass

$$f = f_0 \circ e.$$

Eine analoge Aussage gilt für glatte, analytische bzw. holomorphe Faserungen und einen Morphismus g von Mannigfaltigkeiten sowie für Vektorbündel, wobei sich dasselbe E_0 und f_0 ergibt.

Beweis. Um eine Idee zu bekommen, nehmen wir für einen Augenblick an, $\pi_0 : E_0 \to X$ und f_0 existieren. Dann gibt es nach der Charakterisierung des Produktraumes eine stetige Abbildung $e_0 : E_0 \to X \times F$, so dass $\pi_0 = p \circ e_0$ und $f_0 = q \circ e_0$ ist, wobei $p : X \times F \to X$ und $q : X \times F \to F$ die kanonischen Projektionen bezeichnen. Für $(x, w) = e_0(v)$ gilt dann $g(x) = \rho(w)$.

Um die Existenz zu beweisen, definieren wir also

$$E_0 = \{(x, w) \in X \times F \mid g(x) = \rho(w)\},$$
$$\pi_0(x, w) = x, \qquad f_0(x, w) = w.$$

Dann ist E_0 eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times F$. Ist $k : \rho^{-1}(V) \to V \times Z$ eine lokale Trivialisierung von F, so betrachten wir $U = g^{-1}(V)$. Für $(x, w) \in \pi_0^{-1}(U)$ gilt dann $\rho(w) = g(x) \in V$, also können wir eine fasertreue Abbildung $h : \pi_0^{-1}(U) \to U \times Z$ durch

$$h(x, w) = (x, r(k(w)))$$

definieren, wobei $r : V \times Z \to Z$ die natürliche Projektion bezeichnet. Unter Benutzung von $\rho(k^{-1}(y, z)) = y$ prüft man leicht nach, dass die durch

$$(x, z) \mapsto (x, k^{-1}(g(x), z))$$

definierte Abbildung $U \times Z \to U \times F$ ihr Bild in E_0 hat und das Inverse zu h ist. Damit ist h eine lokale Trivialisierung. Im Fall von Mannigfaltigkeiten sind h und ihr Inverses Morphismen bezüglich der Einschränkung der Strukturgarbe von $X \times F$ auf E_0. Variieren wir (V, k), so sehen wir, dass E_0 eine Untermannigfaltigkeit ist, und dann sind π_0 und f_0 Morphismen.

Ist $e : (E, X) \to (E_0, X)$ ein Morphismus von Faserungen über X mit $\rho \circ f = g \circ \pi$, und ist $f = f_0 \circ e$, so gilt offenbar

$$\pi = p \circ e, \qquad f = q \circ e.$$

Umgekehrt sei ein Morphismus $f : (E, X) \to (F, Y)$ von Faserungen mit $\rho \circ f = g \circ \pi$ gegeben. Dann gibt es nach der Charakterisierung von Produkträumen bzw. Produktmannigfaltigkeiten (s. Satz 6) genau eine stetige Abbildung bzw. einen Morphismus $e : E \to X \times F$ mit den obigen Eigenschaften.

Aus $\rho \circ f = g \circ \pi$ folgt $e(E) \subset E_0$, und aus der Definition von Untermannigfaltigkeiten folgt, dass e ein Morphismus $E \to E_0$ ist. Man prüft leicht, dass $\pi = \pi_0 \circ e$ (dass also e ein Morphismus von Faserbündeln über X ist) und $f = f_0 \circ e$.

Im Fall eines Vektorbündels F ist auch E_0 auf natürliche Weise ein Vektorbündel, und die mit Hilfe einer faserweise linearen lokalen Trivialisierung k von F konstruierte lokale Trivialisierung h von E_0 ist ebenfalls faserweise linear. $\square$

Ähnlich wie im Falle von Produktmannigfaltigkeiten folgt, dass E_0 durch g bis auf kanonische Isomorphismen bestimmt ist. Mann nennt es das induzierte Faser- bzw. Vektorbündel und schreibt $E_0 = g^*(F)$.

Satz 22 *Sind Faserbündel (E, X) und (F, Y) gegeben, so ist $E \times F$ mit der Produktabbildung $E \times F \to X \times Y$ ein Faserbündel mit folgender Eigenschaft. Für beliebige Morphismen $(G, Z) \to (E, X)$ und $(G, Z) \to (F, Y)$ von K-Vektorbündeln gibt es genau einen Morphismus $(G, Z) \to (E \times F, X \times Y)$, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
 & E \times F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
E & & F \\
 & G \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Dies ist leicht zu beweisen. Im Fall von Vektorbündeln ist $E \times F$ wieder ein Vektorbündel mit den Fasern $(E \times F)_{(a,b)} = E_a \oplus F_b$, darum schreibt man es auch als $E \boxplus F$.

Satz 23 *Sind Vektorbündel E und F über X gegeben, so gibt es genau ein Vektorbündel G_0 über X und Homomorphismen $G_0 \to E$ und $G_0 \to F$ mit folgender Eigenschaft. Für beliebige Vektorbündel G über X und Homomorphismen $G \to E$ und $G \to F$ gibt es genau einen Homomorphismus $G \to G_0$, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
 & G_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
E & & F \\
 & G \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Beweis. Wir setzen

$$G_0 = \{(v, w) \in E \times F \mid \pi(v) = \rho(w)\},$$

wobei $\pi : E \to X$ und $\rho : F \to Y$ die Projektionen der Vektorbündel bezeichnen. Nun folgt die Behauptung leicht aus der Universalität des Produktraumes bzw. der Produktmannigfaltigkeit. $\square$

Man schreibt $G_0 = E \oplus F$, denn dieses Bündel hat die Fasern

$$(E \oplus F)_a = E_a \oplus F_a.$$

Bezeichnen wir mit $\Delta : X \to X \times X$ die Diagonaleinbettung $\Delta(x) = (x, x)$, so gilt

$$E \oplus F = \Delta^*(E \boxplus F).$$

Natürlich ist auch diese Konstruktion für beliebige Faserbündel möglich, hat aber dann keine Standardbezeichnung.

Lemma 7 *Gegeben sei ein topologischer Raum bzw. eine Mannigfaltigkeit X und für jedes $a \in X$ ein Vektorraum E_a. Es sei*

$$E = \bigsqcup_{a \in X} E_a$$

und $\pi : E \to X$ die natürliche Projektion. Weiter sei ein Vektorraum Z und eine Familie von Paaren (U, h) gegeben, wobei die U eine Überdeckung von X bilden und $h : \pi^{-1}(U) \to U \times Z$ jeweils bijektiv und fasertreu ist und für jedes $a \in X$ die durch $h(v) = (a, h_a(v))$ definierte Abbildung $h_a : E_a \to Z$ linear ist.

Ist für beliebige (U, h) und (U', h') aus der Familie die Abbildung $h' \circ h^{-1}$ ein Automorphismus von $(U \cap U') \times Z$, so kann man E auf eindeutige Weise mit einer Topologie bzw. auch mit einer Funktionengarbe versehen, so dass $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel in der jeweiligen Kategorie ist.

Beweis. Wir versehen E mit der kleinsten Topologie, für die alle Abbildungen h stetig sind, und im Falle von Mannigfaltigkeiten mit der kleinsten Funktionengarbe, für die alle Abbildungen h Morphismen von Funktionengarben sind. Wie in Satz 5(ii) zeigt man, dass dann X eine Mannigfaltigkeit ist und die h Morphismen von Mannigfaltigkeiten sind. $\square$

Folgerung 4 *Für Vektorbündel E und F über X existieren Vektorbündel*

$$E \otimes F, \quad \mathrm{Hom}(E, F), \quad \bigwedge^k(E),$$

deren Fasern über einem Punkt $a \in X$ durch

$$E_a \otimes F_a, \qquad \mathrm{Hom}(E_a, F_a) \quad \textit{bzw.} \quad \bigwedge^k(E_a)$$

gegeben sind.

Bemerkung. Dies beruht im Wesentlichen darauf, dass $\otimes$, Hom und $\bigwedge^k$ Funktoren sind. Haben wir z. B. Morphismen $f : V_1 \to V_2$ und $g : W_1 \to W_2$ von Vektorräumen, so erhalten wir einen Morphismus $f \otimes g : V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$ von Vektorräumen. Ist nämlich $b_2 : V_2 \times W_2 \to V_2 \otimes W_2$ die kanonische bilineare Abbildung, so ist auch die Abbildung $b_2 \circ (f, g) : V_1 \times W_1 \to V_2 \otimes W_2$ bilinear, und nach der Charakterisierung des Vektorprodukts gibt es einen Morphismus, den man $g \otimes f$ nennt, so dass $b_2 \circ (f, g) = (f \otimes g) \circ b_1$. Schreiben wir $b_1(v, w) = v \otimes w$, so gilt $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$.

Beweis der Folgerung. Sind Trivialisierungen $h : \pi^{-1}(U) \to U \times Z$ von E und $k : \rho^{-1}(U) \to U \times T$ von F gegeben, so fügen sich die Abbildungen $l_a := h_a \otimes k_a : E_a \otimes F_a \to Z \otimes T$ zu einer bijektiven Abbildung

$$l : \bigsqcup_{a \in U} E_a \otimes F_a \to U \times (Z \otimes T)$$

zusammen. Man kann nachprüfen, dass die Familie der (U, l) die Voraussetzungen von Lemma 7 erfüllt. Im Fall von Hom und $\bigwedge^k$ geht man analog vor. $\square$

Man kann auch $E \oplus F$ und $E \boxplus F$ wie in der Folgerung beschreiben, aber unsere fühere Definition ist unabhängig von der Wahl von Trivialisierungen. Um die Definition von $E \otimes F$ usw. von der Wahl von Trivialisierungen unabhängig zu machen, müsste man die Familie aller Trivialisierungen betrachten (analog zu einem maximalen Atlas). Es entsteht die Frage, ob man auch $E \otimes F$ usw. durch eine Universalitätseigenschaft charakterisieren und ob man ein Bündel $E \boxtimes F$ definieren kann.

Satz 24 *Gegeben seien Vektorbündel (E, X) und (F, Y). Dann gibt es ein Vektorbündel (G_0, Z_0) und einen faserweise bilinearen Morphismus $f_0 : (E \times F, X \times Y) \to (G_0, Z_0)$ von Faserbündeln, so dass für ein beliebiges Vektorbündel (G, Z) und einen beliebigen faserweise bilinearen Morphismus $f : (E \times F, X \times Y) \to (G, Z)$ von Faserbündeln ein Morphismus von Vektorbündeln $e : (G_0, Z_0) \to (G, Z)$ mit der Eigenschaft $f = e \circ f_0$ existiert.*

Bezeichnung: $G_0 = E \boxtimes F$.

Beweis. Wir setzen $Z_0 = X \times Y$,

$$G_0 = \bigsqcup_{(a,b)\in Z_0} E_a \otimes F_b,$$

und f_0 sei die Abbildung, deren Einschränkung auf $E_a \times F_b$ gerade die kanonische Abbildung aus der obigen Bemerkung ist. Sind Trivialisierungen $h : \pi^{-1}(U) \to U \times S$ von E und $k : \rho^{-1}(V) \to V \times T$ von F gegeben, so fügen sich die Abbildungen $l_{a,b} := h_a \otimes k_b : E_a \otimes F_b \to S \otimes T$ zu einer bijektiven Abbildung

$$l : \bigsqcup_{(a,b)\in U\times V} E_a \otimes F_b \to U \times V \times (S \otimes T)$$

zusammen. Man kann nachprüfen, dass die Familie der $(U \times V, l)$ die Voraussetzungen von Lemma 7 erfüllt, so dass G_0 zu einem Vektorbündel wird.

Ist nun (G, Z) ein Vektorbündel und $f : (E \times F, X \times Y) \to (G, Z)$ ein faserweise bilinearer Morphismus von Faserbündeln, ist also für jedes $(a, b) \in X \times Y$ die Einschränkung von f auf die Faser $E_a \times F_b$ eine bilineare Abbildung nach einer Faser G_z von G, so gibt es wegen der Universalität des Tensorprodukts von Vektorräumen genau eine Abbildung $e_{a,b} : E_a \otimes F_b \to G_z$, so dass $f|_{E_a\times F_b} = e_{a,b} \circ f_0|_{E_a\times F_b}$ ist. Wenn die gesuchte Abbildung e also existiert, so müssen ihre Einschränkungen auf die Fasern durch die $e_{a,b}$ gegeben sein. Um die Existenz zu beweisen, müssen wir prüfen, dass die $e_{a,b}$ sich zu einem Morphismus topologischer Räume bzw. Mannigfaltigkeiten zusammenfügen. Mit Hilfe der Trivialisierungen läuft das auf dieselbe Frage für triviale Vektorbündel hinaus. Aber die natürliche Abbildung aus dem Raum der bilinearen Abbildungen $S \times T \to R$ in den Raum der linearen Abbildungen $S \otimes T \to R$ ist linear und somit analytisch. □

Analog beweist man

Satz 25 *Es seien E und F stetige oder glatte Vektorbündel über X. Dann gibt es ein Vektorbündel G_0 über X und einen faserweise bilinearen Morphismus $f_0 : E \times F \to G_0$ von Faserbündeln über X, so dass für ein beliebiges Vektorbündel G und einen beliebigen faserweise bilinearen Morphismus $f : E \times F \to G$ von Faserbündeln über X ein Homomorphismus von Vektorbündeln $e : G_0 \to G$ mit der Eigenschaft $f = e \circ f_0$ existiert.*

Dieses Vektorbündel G_0 ist natürlich $E \otimes F$.

Als Spezialfall von $\mathrm{Hom}(E, F)$ erhalten wir im Fall des trivialen Bündels $F = X \times K$ das duale Bündel E^*. Ist E ein Geradenbündel, so ist für ganze Zahlen $k > 0$

$$E^k = \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{k}$$

wieder ein Geradenbündel. (Manchmal wird es zur Unterscheidung vom k-fachen Kartesischen Produkt auch mit $E^{\otimes k}$ bezeichnet.) Wir setzen E^0 gleich dem trivialen Geradenbündel $X \times K \to X$. Die Abbildung

$$E \otimes E^* \to E^0,$$

deren Einschränkung auf die Fasern die natürliche Paarung $E_a \otimes E_a^* \to K$ ist, ist ein Isomorphismus von Geradenbündeln. Definieren wir also für $k > 0$

$$E^{-k} = \underbrace{E^* \otimes \cdots \otimes E^*}_{k},$$

so folgt für alle $k, l \in \mathbb{Z}$

$$E^k \otimes E^l \cong E^{k+l}.$$

Ein Beispiel für ein Geradenbündel ist das kanonische Bündel

$$K_X = \bigwedge\nolimits^n (T^*(X))$$

einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X. Im Fall $K = \mathbb{R}$ sind seine Schnitte gerade die Volumenformen auf X.

Definition 25 *Ein Unterbündel eines Vektorbündels $\pi : E \to X$ ist ein Vektorbündel $\rho : F \to X$ mit folgenden Eigenschaften: F ist ein topologischer Unterraum bzw. eine Untermannigfaltigkeit von E, ρ ist die Einschränkung von π und für jedes $a \in X$ ist F_a mit seiner Vektorraumstruktur ein linearer Unterraum von E_a.*

Ist $f : E \to F$ ein Homomorphismus von Vektorbündeln über X, so definieren wir

$$\operatorname{Ker} f = \bigsqcup_{a \in X} \operatorname{Ker} f_a, \qquad \operatorname{Im} f = \bigsqcup_{a \in X} \operatorname{Im} f_a.$$

Dieser Begriff von Unterbündel ist angepasst an die Kategorie der Vektorbündel über X. Man müsste einen analogen Begriff in der Kategorie aller Vektorbündel definieren, um z. B. das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit als Unterbündel des Tangentialbündels der umgebenden Mannigfaltigkeit zu bezeichnen.

Satz 26 *Ist $f : E \to F$ ein Homomorphismus von Vektorbündeln über X und ist der Rang von f_a unabhängig von a, so sind* $\operatorname{Ker} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *Unterbündel.*

Beweis. Mit Hilfe von lokalen Trivialisierungen kann der Beweis leicht auf den Fall von trivialen Bündel $E = X \times Z$ und $F = X \times T$ zurückgeführt werden. Wir halten $a \in X$ fest und wählen ein Komplement Z_0 zu $\operatorname{Ker} f_a$ in Z und ein Komplement T_0 zu $\operatorname{Im} f_a$ in T. Es sei $i : Z_0 \to Z$ die Einbettung und $p : T \to T/T_0$ die Projektion. Nun hängt die lineare Abbildung $p \circ f_x \circ i : Z_0 \to T/T_0$ glatt von x ab, und die Menge U der $x \in X$, für die diese Abildung ein Isomorphismus ist, ist eine offene Umbegung von a. Wir bezeichnen ihr Inverses mit g_x.

Für $x \in U$ ist $f \circ i$ injektiv, und wegen der Konstanz des Ranges ist ihr Bild gleich $\operatorname{Im} f_a$. Also hat die durch $(x, z) \mapsto (x, f_x(z))$gegebene Abbildung $U \times Z_0 \to (\operatorname{Im} f)|_U$ das Inverse $(x, t) \mapsto (x, g_x(p(t)))$, welches eine lokale Trivialisierung von $\operatorname{Im} f$ ist.

Es sei $q : Z \to Z/Z_0$ die Projektion und $h_x : Z \to Z$ gegeben durch $h_x = \operatorname{id} - g_x \circ p \circ f_x$. Für $z \in Z_0$ gilt $h_x(z) = 0$, so dass wir $h_x = \tilde{h}_x \circ q$ für eine Abbildung $\tilde{h}_x : Z/Z_0 \to \operatorname{Ker} f_x$ mit schreiben können. Für $z \in \operatorname{Ker} f_x$ gilt $h_x(z) = z$, so dass $\tilde{h}_x \circ q_x = \operatorname{id}$, wenn q_x die Einschränkung von q auf $\operatorname{Ker} f_x$ bezeichnet. Wegen der Konstanz des Ranges von f_x ist $\tilde{h}_x$ das Inverse von q_x. Somit ist die durch $(x, z) \mapsto (x + Z_0, \tilde{h}_x(z))$ gegebene Abbildung $U \times Z/Z_0 \to \operatorname{Ker} f|_U$ eine lokale Trivialisierung von $\operatorname{Ker} f_x$.

Kombinieren wir die erhaltenen lokalen Trivialisierungen mit Kartenabbildungen für (Teilmengen von) U, so sehen wir, dass die besagten Unterbündel glatt sind. □

Definition 26 *Ein Schnitt einer Faserung $\pi : E \to X$ ist ein Morphismus $s : X \to E$, so dass $\pi \circ s = \operatorname{id}_X$. Ist E ein Vektorbündel, so definieren wir für zwei Schnitte s und t und eine Funktion $f \in \mathcal{S}(X)$*

$$(s + t)(x) = s(x) + t(x), \qquad (fs)(x) = f(x)s(x).$$

Damit wird der Raum der Schnitte zu einem $\mathcal{S}(X)$-Modul, den man häufig mit $\Gamma(E)$ bezeichnet. Sein Nullelement nennt man Nullschnitt 0_E. Ein Schnitt s ist eindeutig durch sein Bild $s(X)$ bestimmt und wird manchmal mit ihm identifiziert. Letzteres ist eine Untermannigfaltigkeit, die jede Faser transversal schneidet und durch π isomorph auf X abgebildet wird.

Die Schitte der oben konstruierten Bündel haben oft eine konkrete Interpretation. Die Schnitte von $T(X)$ sind Vektorfelder, die Schnitte von $\bigwedge^k(T^*(X))$ sind alternierende Differentialformen auf X. Jedem Schnitt s von $\operatorname{Hom}(E, F)$ kann man einen Homomorphismus $f : E \to F$ von Vektorbündeln zuordnen, indem man $f|_{E_a} = s(a)$ setzt. Damit erhalten wir eine Bijektion von $\Gamma(\operatorname{Hom}(E, F))$ auf die Menge der Homomorphismen $E \to F$ von Vektorbündeln (über X). Um das Bündel $\operatorname{Hom}(E, F)$ nicht mit dieser

Menge von Homomorphismen zu verwechseln, wird es von manchen Autoren mit $\mathrm{HOM}(E, F)$ bezeichnet.

Man kann glatte Vektorbündel auch über Manigfaltigkeiten mit Rand auf naheliegende Weise definieren.

Lemma 8 *Ist X eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, so ist jedes glatte Vektorbündel E über $X \times [0,1]$ isomorph zu $p^*(F)$ für ein glattes Vektorbündel F über X, wobei $p : X \times [0,1] \to X$ die natürliche Projektion bezeichnet.*

Beweisskizze. Wir definieren $p_t : X \times [0,1] \to X \times \{t\}$ durch $p_t(x,u) = (x,t)$ und setzen $E_t = p_t^*(E|_{X\times\{t\}})$. Jeder glatte Schnitt von $\mathrm{Hom}(E, E_t)|_{X\times\{t\}}$ lässt sich mit Hilfe einer Zerlegung der Eins glatt auf $X \times [0,1]$ fortsetzen. Für den Schnitt id ist die Fortsetzung noch in einer Umgebung U invertierbar, und wir erhalten einen Isomorphismus $E_U \to p_t^*(E_t)$. Wegen der Kompaktheit von X enthält diese Umgebung eine Menge der Form $X \times I$, wobei I eine Umgebung von t ist. Aus der Überdeckung von $[0,1]$ durch solche I können wir eine endliche Teilüberdeckung auswählen und durch Verkettung einen glatten Isomorphismus $E \to p^*(E)$ gewinnen. □

Folgerung 5 *Jedes glatte Vektorbündel über $[0,1]^n$ ist trivial.*

Dies folgt einfach durch Induktion.

Definition 27 *Zwei stetige Abbildungen g_0, $g_1 : X \to Y$ heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung $g : X \times [0,1] \to Y$ gibt, so dass $g(x,0) = g_0(x)$ und $g(x,1) = g_1(x)$ für alle $x \in X$. Sind g_0 und g_1 Morphismen glatter Mannigfaltigkeiten, so heißen sie glatt homotop, wenn es eine Abbildung g wie oben gibt, die ein Morphismus glatter Mannigfaltigkeiten mit Rand ist.*

Folgerung 6 *Sind die glatten Morphismen g_0, $g_1 : X \to Y$ glatt homotop und ist F ein glattes Vektorbündel ber Y, so sind $g_0^*(F)$ und $g_1^*(F)$ als glatte Vektorbündel isomorph.*

Dies folgt durch Anwendung von Lemma 8 auf $E = g^*(F)$, wobei $g(x,t) = g_t(x)$ die Homotopie bezeichnet.

Satz 27 *Es sei X eine Hausdorffsche glatte Mannigfaltigkeit mit abzhlbarer Basis und $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V mit folgender Eigenschaft. Für jedes glatte Vektorbündel E über X vom Rang k gibt es einen Morphismus g von X in die Grassmannmannigfaltigkeit G der k-dimensionalen Unterräume von V, so dass*

$$E \cong g^*(E_0),$$

wobei E_0 das universelle Vektorbündel über G bezeichnet (daher der Name).

Beweis für kompaktes X. Es sei $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine endliche Überdeckung von X durch offene Mengen, deren Bilder unter geeigneten Kartenabbildung relativ kompakt sind, und $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine glatte Zerlegung der Eins mit $\operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$. Weiter sei Z ein k-dimensionaler Vektorraum und $V = Z^A = \{(z_\alpha)_{\alpha\in A} \mid z_\alpha \in Z\}$. Wir bezeichnen mit $p_\alpha : V \to Z$ die Projektion auf die α-Komponente.

Für jedes $\alpha \in A$ gibt es nach der Folgerung aus Lemma 8 eine lokale Trivialisierung $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times Z$, die wir als $h_\alpha(v) = (\pi(v), h'_\alpha(v))$ schreiben. Wir definieren eine glatte Abbildung $f : E \to V$ durch

$$f(v) = \big(\varphi_\alpha(\pi(v))h'_\alpha(v)\big)_{\alpha\in A}.$$

Dann ist $f|_{E_a}$ linear, und für $\varphi_\alpha(a) \neq 0$ ist $p_\alpha \circ f|_{E_a} = \varphi_\alpha(a)h'_\alpha|_{E_a}$ ein Isomorphismus. Da für jedes $a \in X$ ein solches α existiert, ist $f|_{E_a}$ injektiv. Wir setzen

$$g(a) = f(E_a) \in G.$$

Um die Glattheit von g zu beweisen, können wir uns auf eine der Mengen U_α einschränken. Eine Basis von Z liefert mittels h'_α glatte Schnitte $s_1, \ldots, s_k$ von $E|_{U_\alpha}$, die faserweise linear unabhängig sind. Setzen wir

$$F_\alpha(a) = \big(f(s_1(a)), \ldots, f(s_k(a))\big).$$

so erhalten wir eine glatte Abbildung F_α von U_α in die Stiefelmannigfaltigkeit S der linear unabhängigen k-Tupel in V. Eine Funktion auf einer offenen Teilmenge von G ist nach Definition genau dann glatt, wenn ihr Pullback unter der natürlichen Projektion $\rho : S \to G$ glatt ist. Wegen $g|_{U_\alpha} = \rho \circ F_\alpha$ ist dann auch ihr Pullback unter g glatt auf U_α. Somit ist g ein Morphismus glatter Mannigfaltigkeiten.

Setzen wir $f_0(v) = (g(\pi(v)), f(v))$, so ist $f(v) \in g(\pi(v))$, also $f_0(v) \in E_0$. Da E_0 eine Untermannigfaltigkeit von $G \times V$ ist, ist auch $f_0 : E \to E_0$ ein Morphismus glatter Mannigfaltigkeiten, er hat die Eigenschaft

$$\pi_0 \circ f_0 = g \circ \pi,$$

und seine Einschränkung auf die Fasern von E ist linear. Mit anderen Worten, f_0 ist ein Morphismus glatter Vektorbündel.

Nun sei E_1 ein weiteres Vektorbündel über X und $f_1 : E_1 \to E_0$ ein Morphismus glatter Vektorbündel mit der Eigenschaft

$$\pi_0 \circ f_1 = g \circ \pi_1.$$

Für $v_1 \in E_1$ mit $\pi_1(v_1) = a$ gilt $f_1(v) \in g(a)$, d. h. $f_1(v) = f(v)$ für ein eindeutig bestimmtes Element $v \in E_a$. Es gibt also eine eindeutig bestimmte fasertreue Abbildung $b : E_1 \to E$ mit $f_1 = f_0 \circ b$, und ihre Einschränkung auf jede Faser ist linear. $\square$

10 Fast komplexe Mannigfaltigkeiten

Jeden komplexen Vektorraum V können wir auch als reellen Vektorraum auffassen. Die Multiplikation mit der imaginären Einheit i ist dann ein $\mathbb{R}$-linearer Endomorphismus J, so dass $J^2 = -I$. Umgekehrt kann man jeden reellen Vektorraum V, der mit einem Endomorphismus J mit der Eigenschaft $J^2 = -I$ ausgestattet ist, in einen komplexen Vektorrauum verwandeln, indem man für a, $b \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ setzt

$$(a + ib)v = av + bJv.$$

Die Komplexifizierung eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V kann man definieren als die additive Gruppe

$$V_{\mathbb{C}} = V \oplus V,$$

deren Elemente (x, y) wir nach der Vorschrift

$$(a + ib)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

mit komplexen Zahlen $a + ib$ multiplizieren und in den V mittels $x \mapsto (x, 0)$ eingebettet ist. Damit wird $V_{\mathbb{C}}$ zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum, und jede $\mathbb{R}$-Basis von V ist eine $\mathbb{C}$-Basis von $V_{\mathbb{C}}$. Die Komplexifizierung ist wie folgt charakterisiert: Jeder $\mathbb{R}$-lineare Homomorphismus von V in einen $\mathbb{C}$-Vektorraum W (aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum) lässt sich als Verkettung der Einbettung $V \to V_{\mathbb{C}}$ mit einem eindeutig bestimmten Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen $V_{\mathbb{C}} \to W$ darstellen. Letzterer ist nichts anderes als die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung. Wir definieren die komplexe Konjugation auf $V_{\mathbb{C}}$ durch $\overline{(x, y)} = (x, -y)$. Man kann $V_{\mathbb{C}}$ auch als $V \otimes \mathbb{C}$ definieren, dann ist $\overline{v \otimes z} = v \otimes \bar{z}$.

Ist $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von V, so ist $v_1, \ldots, v_m, iv_1, \ldots, iv_m$ eine Basis von $V_{\mathbb{C}}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ist ein $\mathbb{C}$-linearen Homomorphismus $f : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ bezüglich der Basen $v_1, \ldots, v_m$ von V und $w_1, \ldots, w_n$ von W durch eine Matrix $C = A + iB$ dargestellt, wobei A und B reelle Einträge haben, so wird f in den entsprechenden Basen von V und W als reelle Vektorräume durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

dargestellt.

Hat der reelle Vektorraum V bereits eine komplexe Struktur J, so erfüllt die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von J auf $V_{\mathbb{C}}$ die Gleichung $(J - iI)(J + iI) = 0$. Darum zerfällt $V_{\mathbb{C}}$ in die direkte Summe des Eigenunterraums $V^{1,0}$ zum Eigenwert i und des Eigenunterraums $V^{0,1}$ zum Eigenwert $-i$. Offensichtlich gilt $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$. Die identische Abbildung $I : V \to V$, bei der wir den ersten

Raum als reellen und den zweiten als komplexen Vektorraum betrachten, hat eine $\mathbb{C}$-linearen Fortsetzung $V_{\mathbb{C}} \to V$, deren Kern gleich $V^{0,1}$ ist, während $V^{1,0}$ bijektiv auf V abgebildet wird.

Die Räume $\bigwedge^p(V^{1,0})$ und $\bigwedge^p(V^{0,1})$ sind auf natürliche Weise in $\bigwedge^p(V)$ eingebettet. Es sei

$$\bigwedge\nolimits^{p,q}(V) = \langle \omega \wedge \psi \mid \omega \in \bigwedge\nolimits^p(V^{1,0}),\, \psi \in \bigwedge\nolimits^q(V^{0,1})\rangle_{\mathbb{C}}$$

($\mathbb{C}$-lineare Hülle). Dies definiert eine $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-Graduierung auf $\bigwedge(V_{\mathbb{C}})$, es gilt $\overline{\bigwedge^{p,q}(V)} = \bigwedge^{q,p}(V)$ und

$$\bigwedge\nolimits^r(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus\nolimits_{p+q=r} \bigwedge\nolimits^{p,q}(V).$$

Wir wollen auf jeder holomorphen Mannigfaltigkeit die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit definieren. Dies ist klar im Fall eines komplexen Vektorraums V, der nicht nur die Funktionengarbe $\mathcal{O}$ trägt, sondern, wenn wir ihn als reellen Vektorraum auffassen, auch die Funktionengarbe $\mathcal{E}$. Für eine holomorphe Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{S})$ sei $\mathcal{T}$ die kleinste Funktionengarbe auf X derart, dass für jeden komplexen Vektorraum V und jede offene Menge U in X ein beliebiger Morphismus $(U, \mathcal{S}|_U) \to (V, \mathcal{O})$ auch ein Morphismus $(U, \mathcal{T}|_U) \to (V, \mathcal{E})$ ist. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ eine glatte Mannigfaltigkeit, und jede Karte von $(X, \mathcal{S})$ ist auch eine Karte von $(X, \mathcal{T})$. Auf ähnliche Weise kann man jeder reell-analytischen Mannigfaltigkeit eine glatte Mannigfaltigkeit zuordnen.

Wir werden einem allgemeinen Brauch folgen und die Garbe der holomorphen Funktionen auf einer beliebigen komplexen Mannigfaltigkeit X mit $\mathcal{O}$ oder $\mathcal{O}_X$ sowie die Garbe der glatten Funktionen auf einer glatten Mannigfaltigkeit X mit $\mathcal{E}$ oder $\mathcal{E}_X$ bezeichnen.

Häufig ist es nützlich, die Garbe $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ der $\mathbb{C}$-wertigen glatten Funktionen zu betrachten. Jede Derivation $v : \mathcal{E}_a \to \mathbb{R}$ des Halmes in einem Punkt $a \in X$ setzt sich zu einer $\mathbb{C}$-linearen Derivation $v : (\mathcal{E}_{\mathbb{C}})_a \to \mathbb{C}$ fort und schränkt sich zu einer Derivation $\mathcal{O}_a \to \mathbb{C}$ ein. Auf diese Weise erhalten wir eine lineare Abbildung $T_a(X, \mathcal{E}) \to T_a(X, \mathcal{O})$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Im Fall $X = \mathbb{C}^n$ folgt aus der Definition, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial z_j}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_j} = i\frac{\partial f}{\partial z_j}.$$

Dies zeigt, dass die $\mathbb{R}$-Basis $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j} \mid j = 1, \ldots, n\}$ von $T_a(\mathbb{C}^n, \mathcal{E})$ auf die $\mathbb{R}$-Basis $\{\frac{\partial}{\partial z_j}, i\frac{\partial}{\partial z_j} \mid j = 1, \ldots, n\}$ von $T_a(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ abgebildet wird. Da jede holomorphe Mannigfaltigkeit lokal zu $\mathbb{C}^n$ isomorph ist, erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $T_a(X, \mathcal{E}) \to T_a(X, \mathcal{O})$, so dass wir nur noch $T_a(X)$

schreiben, worauf wir eine komplexe Struktur J_a haben. Im Fall von $\mathbb{C}^n$ ist natürlich $J(\frac{\partial f}{\partial x_j}) = \frac{\partial f}{\partial y_j}$, $J(\frac{\partial f}{\partial y_j}) = -\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Unter Benutzung von Trivialisierungen sieht man, dass sich die Endomorphismen J_a zu einem glatten Schnitt J von $\mathrm{End}(T(X))$ zusammenfügen.

Wie schon im Fall eines abstrakten Vektorraums hat die identische Abbildung von $T_a(X)$ eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung $\alpha_a : T_a(X)_{\mathbb{C}} \to T_a(X)$, welche $T_a^{1,0}(X)$ mit $T_a(X)$ identifiziert und $T_a^{0,1}(X)$ auf 0 abbildet. Im Fall $X = \mathbb{C}^n$ wird die Projektion von $\frac{\partial}{\partial x_j} \in T_a(X)$ auf $T_a^{1,0}(X)$ durch α_a auf den Vektor $\frac{\partial}{\partial z_j} \in T_a(X)$ abgebildet und darum ebenfalls mit $\frac{\partial}{\partial z_j}$ bezeichnet, während die komplexen Konjugation die beiden Projektionen vertauscht, so dass man die andere Projektion von $\frac{\partial}{\partial x_j}$ mit $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ bezeichnet. Man findet leicht die expliziten Formeln

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Bekanntlich ist eine glatte Funktion f auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{C}^n$ genau dann holomorph, wenn sie die Cauchy-Riemann-Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$ für alle j erfüllt. Es folgt, dass eine Funktion $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(U)$ für eine offene Menge U in einer holomorphen Mannigfaltigkeit X genau dann zu $\mathcal{O}(U)$ gehört, wenn sie von allen Tangentialvektoren $v \in T^{0,1}(U)$ annulliert wird.

Die Aufspaltung $T_a(X)_{\mathbb{C}} = T^{1,0}(X) \oplus T^{0,1}(X)$ induziert eine Aufspaltung $T_a^*(X)_{\mathbb{C}} = T^{*,1,0}(X) \oplus T^{*,0,1}(X)$ des komplexifizierten Kotangentialraums. Ist $U \subset \mathbb{C}^n$ und $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(U)$, so ist df ein Schnitt von $T^*(U)_{\mathbb{C}}$. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_k}{\partial z_j} &= \delta_{jk}, & \frac{\partial z_k}{\partial \bar{z}_j} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial z_j} &= 0, & \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial \bar{z}_j} &= \delta_{jk} \end{aligned}$$

ist $\{dz_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ die duale Basis von $T_a^{*,1,0}(U)$ zur Basis $\{\frac{\partial}{\partial z_j} \mid j = 1, \ldots, n\}$ von $T_a^{1,0}(U)$, während $\{d\bar{z}_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ die duale Basis von $T_a^{*,0,1}(U)$ zur Basis $\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \mid j = 1, \ldots, n\}$ von $T_a^{0,1}(U)$ ist. Man rechnet leicht nach, dass

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j.$$

Allgemeiner sei ω ein Schnitt von $\bigwedge^{p,q} T^*(U)$. Dann haben wir eine Darstellung

$$\omega = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_p \\ j_1 < \cdots < j_q}} f_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

oder abgekürzt

$$\omega = \sum_{I,J} f_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Nun gilt $d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega$, wobei

$$\partial\omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{I,J} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$
$$\bar{\partial}\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{I,J} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Definition 28 *Eine fast komplexe Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{E})$ mit einem glatten Schnitt J von $\operatorname{End} T(X, \mathcal{E})$, der faserweise die Eigenschaft $J^2 = -I$ hat.*

Auch für fast komplexe Mannigfaltigkeiten $(X, \mathcal{E}, J)$ haben wir die Aufspaltung $T_a(X)_\mathbb{C} = T^{1,0}(X) \oplus T^{0,1}(X)$ in glatte $\mathbb{C}$-lineare Unterbündel und die $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-Graduierung von $\bigwedge(T^*(X)_\mathbb{C})$. Wir bezeichnen den Raum der Schnitte $U \to \bigwedge^{p,q}(T(X))$ mit $\mathcal{E}^{p,q}(X)$, so dass

$$\mathcal{E}^r(X) = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{E}^{p,q}(X).$$

Wir definieren ∂, $\bar{\partial} : \mathcal{E}^\bullet(X) \to \mathcal{E}^\bullet(X)$, indem wir für $\omega \in \mathcal{E}^{p,q}(X)$ setzen

$$\partial\omega = \pi^{p+1,q}(d\omega), \qquad \bar{\partial}\omega = \pi^{p,q+1}(d\omega),$$

wobei $\pi^{p,q}$ die Projektion $\mathcal{E}^\bullet(X)_\mathbb{C} \to \mathcal{E}^{p,q}(X)$ bezeichnet. Im Allgemeinen kann $d\omega$ Komponenten in $\mathcal{E}^{p',q'}(X)$ für beliebige p', q' mit $p' + q' = p + q + 1$ haben. Es ist offensichtlich, dass

$$\overline{\mathcal{E}^{p,q}(X)} = \mathcal{E}^{q,p}(X), \qquad \overline{\partial\omega} = \bar{\partial}\bar{\omega}.$$

Aus der Definition von d folgt für $\omega \in \mathcal{E}^r_\mathbb{C}(X)$ und $\psi \in \mathcal{E}^\bullet_\mathbb{C}(X)$

$$\partial(\omega \wedge \psi) = \partial\omega \wedge \psi + (-1)^r \omega \wedge \partial\psi,$$
$$\bar{\partial}(\omega \wedge \psi) = \bar{\partial}\omega \wedge \psi + (-1)^r \omega \wedge \bar{\partial}\psi.$$

Satz 28 (Newlander-Nirenberg) *Es sei $(X, \mathcal{E}, J)$ eine fast komplexe Mannigfaltigkeit. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) Das Unterbündel $T^{1,0}(X)$ (oder $T^{0,1}(X)$) von $T(X)_\mathbb{C}$ ist involutiv, d. h. der Kommutator von zweien seiner Schnitte liegt wieder in diesem Unterbündel.

(ii) Es gilt $d = \partial + \bar\partial$ auf $\mathcal{E}^{1,0}(X)$ (oder auf $\mathcal{E}^{0,1}(X)$).

(iii) Es gilt $d = \partial + \bar\partial$.

(iv) Die Krümmung S von J (siehe Aufgabe 24) ist identisch gleich Null.

(v) Auf X existiert eine Struktur $\mathcal{O}$ einer komplexen Mannigfaltigkeit, welche $\mathcal{E}$ und J induziert.

Bemerkung. Eine fast komplexe Struktur J, die eine der äquivalenten Bedingungen (i)–(iv) erfüllt, heißt integrabel. Für $\dim_{\mathbb{R}} X = 2$ ist jede fast komplexe Struktur integrabel, denn dann ist (ii) wegen $\mathcal{E}^2_{\mathbb{C}} = \mathcal{E}^{2,0} \oplus \mathcal{E}^{1,1} \oplus \mathcal{E}^{0,2}$ erfüllt, und (i) ist wegen $\operatorname{rk} T^{0,1}(X) = 1$ erfüllt, denn

$$[fv, gv] = \big(fv(g) - gv(f)\big)v.$$

für Funktionen f und g.

Falls die Funktionengarbe $\mathcal{O}$ wie in (v) existiert, so ist sie eindeutig bestimmt, denn

$$\mathcal{O}(U) = \{f \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(U) \mid v(f) = 0 \;\forall\, v \in T^{0,1}(U)\} = \{f \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(U) \mid \bar\partial f = 0\}.$$

Aus der Eigenschaft (iii) folgt

$$0 = d^2 = \partial^2 + \partial\bar\partial + \bar\partial\partial + \bar\partial^2$$

und, wenn wir die Komponenten beider Seiten bezüglich der Graduierung vergleichen,

$$\partial^2 = 0, \qquad \partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0, \qquad \bar\partial^2 = 0.$$

Beweis, dass aus (v) alle anderen Bedingungen folgen. Es genügt, den Fall $X = \mathbb{C}^n$ zu betrachten. Jeden Schnitt von $T^{0,1}(U)$ kann man in der Form

$$v = \sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial}{\partial \bar z_j}$$

mit $f_j \in \mathcal{E}(X)$ schreiben, und die Involutivität folgt durch Nachrechnen. Dass (iii) erfüllt ist, haben wir bereits vor der Definition fast komplexer Mannigfaltigkeiten nachgeprüft, und (ii) ist ein Spezialfall von (iii). Aussage (iv) bleibt als Hausaufgabe. □

Beweis der Äquivalenz von (i)–(iii). Es ist natürlich gleichgültig, ob wir in (i) bzw. (ii) den Bigrad (1,0) oder (0,1) betrachten, denn beide werden durch die komplexe Konjugation vertauscht. Nun seien v und w glatte

Schnitte von $T^{0,1}(U)$ und $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$. Nach Satz 17 ($\mathbb{C}$-linear fortgesetzt) gilt

$$\omega([v,w]) = \mathcal{L}_v(\omega(w)) - \iota_w(\mathcal{L}_v(\omega)) = -\iota_w(d(\omega(v)) + \iota_v(d\omega)) = -d\omega(v,w).$$

Gilt (i), so verschwindet an jeder Stelle $a \in X$ die Einschränkung von $d\omega$ auf $T_a^{0,1}(X) \times T_a^{0,1}(X)$, denn jeder Tangentialvektor lässt sich zu einem Vektorfeld auf einer Umgebung U ausdehnen. Somit ist $\pi^{0,2}(d\omega) = 0$, und (ii) folgt.

Gilt (ii), so wird der Kommutator zweier Schnitte v, w von $T^{0,1}(U)$ von jedem $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(U)$ annulliert. Da man zu jedem Vektor in $u \in T_a^{1,0}(U)$ ein $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(U)$ mit $\omega(u) \neq 0$ finden kann, hat $[v,w]$ keine Komponente in $T^{1,0}(U)$, also folgt (i).

Aus (ii) folgt (iii) auf $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^r(X)$ durch Induktion, da jede r-Form eine Linearkombination von Produkten von Formen kleineren Grades ist. □

11 Grundbegriffe der Homologie und Kohomologie

Es sei $(X, \mathcal{E})$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine glatte singuläre p-Kette in X ist ein Paar (Y, c) bestehend aus einer endlichen disjunkten Vereinigung Y von p-dimensionalen orientierten kompakten Polyedern und einem glatten Morphismus $c : Y \to X$. Man definiert die Summe zweier p-Ketten (Y_1, c_1) und (Y_2, c_2) als die p-Kette $(Y_1 \sqcup Y_2, c)$ mit $c|_{Y_1} = c_1$ und $c|_{Y_2} = c_2$. Die Menge der glatten singulären p-Ketten ist ein Monoid mit der p-Kette $\emptyset \to X$ als Nullobjekt. Wir faktorisieren nach dem von allen Summen $(Y, c) + (-Y, c)$ erzeugten Ideal aus und erhalten eine abelsche Gruppe[3] $C_p(X)$.

Der Rand einer p-Kette (Y, c) ist $(\partial Y, \partial c)$, wobei ∂Y die disjunkte Vereinigung der maximalen Seiten von Y mit der Randorientierung ist und $\partial c = c|_{\partial Y}$. Auf diese Weise erhalten wir eine Abbildung $\partial_p : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$. Wir schreiben meist nur c statt (Y, c). Eine Kette heißt Zykel, wenn ihr Rand gleich Null ist. Zwei glatte p-Zykel heißen homolog, wenn ihre Differenz ein Rand ist. Wir bezeichnen die Gruppe der p-Zykel mit $Z_p(X)$ und die Gruppe der p-Ränder mit[4] $B_p(X)$. Die Homologieklassen der Dimension p bilden dann eine Gruppe

$$H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X).$$

Eine alternierende p-Form $\omega \in \mathcal{E}^p(X)$ heißt geschlossen, wenn $d\omega = 0$, und sie heißt exakt, wenn es ein $\psi \in \mathcal{E}^{p-1}(X)$ gibt, so dass $d\psi = \omega$. Zwei

[3] C steht für “chain”.

[4] B steht für “boundary”.

geschlossene p-Formen heißen kohomolog, wenn ihre Differenz exakt ist. Wir bezeichnen den Vektorraum der geschlossenen p-Formen mit $Z^p(X, \mathbb{R})$ und den der exakten p-Formen mit $B^p(X, \mathbb{R})$. Die Kohomologieklassen vom Grad p bilden dann einen Vektorraum

$$H^p(X, \mathbb{R}) = Z^p(X, \mathbb{R})/B^p(X, \mathbb{R}).$$

Die Gruppen der glatten singulären Ketten mit dem Randoperator ∂ bilden eine Folge von linearen Abbildungen

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \longrightarrow 0,$$

mit der Eigenschaft $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$. Eine solche Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen, bei der die Verkettung von je zwei aufeinanderfolgenden Homomorphismen gleich Null ist, nennt man Komplex. Es ist klar, dass

$$Z_p(X) = \operatorname{Ker} \partial_p, \qquad B_p(X) = \operatorname{Im} \partial_{p+1}.$$

Auch die Vektorräume der äußeren Differentialformen mit dem äußeren Differential d bilden einen Komplex

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(X) \xrightarrow{d_0} \mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{d_1} \mathcal{E}^2(X) \xrightarrow{d_2} \ldots,$$

denn $d_{p+1} \circ d_p = 0$. Natürlich gilt wieder

$$Z^p(X, \mathbb{R}) = \operatorname{Ker} d_p, \qquad B^p(X, \mathbb{R}) = \operatorname{Im} d_{p-1}.$$

Es ist nützlich, die Vektorräume $\mathcal{E}^p(X)$, $Z^p(X, \mathbb{R})$ bzw. $B^p(X, \mathbb{R})$ zur Algebra $\mathcal{E}^\bullet(X)$ und ihren Unterräumen

$$Z^\bullet(X, \mathbb{R}) = \operatorname{Ker} d \qquad \text{und} \qquad B^\bullet(X, \mathbb{R}) = \operatorname{Im} d$$

zusammenzufassen.

Lemma 9 *Ist X eine glatte Mannigfaltigkeit, so ist $Z^\bullet(X, \mathbb{R})$ eine graduierte Unteralgebra in $\mathcal{E}^\bullet(X)$ und $B^\bullet(X, \mathbb{R})$ ein graduiertes zweiseitiges Ideal in $Z^\bullet(X, \mathbb{R})$. Folglich ist auch*

$$H^\bullet(X, \mathbb{R}) = Z^\bullet(X, \mathbb{R})/B^\bullet(X, \mathbb{R}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} H^p(X, \mathbb{R})$$

eine graduierte Algebra.

Das Pullback unter einem glatten Morphismus $f : X \to X'$ induziert einen Homomorphismus von Algebren $f^* : H^\bullet(X', \mathbb{R}) \to H^\bullet(X, \mathbb{R})$.

Beweis. Da d eine Derivation vom Grad 1 ist, gehört ω genau dann zu $Z^\bullet(X,\mathbb{R})$, wenn das für jede homogene Komponente von ω gilt, also ist $Z^\bullet(X,\mathbb{R})$ ein graduierter Unterraum. Analoges gilt für $B^\bullet(X,\mathbb{R})$.

Für $\omega \in Z^p(X,\mathbb{R})$ und $\psi \in Z^q(X,\mathbb{R})$ folgt aus Satz 13(d) sofort $d(\omega\wedge\psi) = 0$, also $\omega \wedge \psi \in Z^{p+q}(X,\mathbb{R})$. Somit ist $Z^\bullet(X,\mathbb{R})$ eine graduierte Unteralgebra. Ist $\omega \in B^p(X,\mathbb{R})$, also $\omega = d\omega_0$, so gilt nach derselben Formel wegen $d\psi = 0$

$$d(\omega_0 \wedge \psi) = \omega \wedge \psi.$$

Also ist $B(X,\mathbb{R})$ ein Rechtsideal, und wegen Satz 10(ii) auch ein Linksideal.

Für einen glatten Morphismus $f : X \to X'$ ist das Pullback $f^* : \mathcal{E}^\bullet(X') \to \mathcal{E}^\bullet(X)$ nach Satz 12 ein Homomorphismus von graduierten Algebren, und nach Satz 13 gilt $d \circ f^* = f^* \circ d$. Eine Abbildung zwischen Komplexen mit diesen Eigenschaften nennt man Kettenabbildung. Sie bildet geschlossene Formen auf geschlossene Formen und exakte Formen auf exakte Formen ab und induziert somit einen Homomorphismus zwischen den Kohomologiealgebren. □

Auf den Homologiegruppen gibt es keine natürliche Algebrenstruktur, obwohl der Randoperator von Polyedern die Eigenschaft

$$\partial(W \times Y) = \partial W \times Y \sqcup (-1)^{\dim W} W \times \partial Y$$

hat. Trotzdem fasst man auch die Gruppen der Ketten zu einer graduierten Gruppe $C_\bullet(X)$ zusammen und erhält daraus die totale Homologiegruppe

$$H_\bullet(X) = Z_\bullet(X)/B_\bullet(X) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} H_p(X).$$

Ein glatter Morphismus $f : X \to X'$ induziert auch eine Abbildung $f_* : C(X) \to C(X')$ durch $f_*(c) = f \circ c$. Dies ist ebenfalls eine Kettenabbildung, d. h. sie erhält die Graduierung und erfüllt

$$f_* \circ \partial = \partial \circ f_*.$$

Somit induziert f_* eine Abbildung zwischen den entsprechenden Homologiegruppen.

Lemma 10 *Wir definieren eine Paarung*

$$\mathcal{E}^p(X) \times C_p(X) \to \mathbb{R}$$

durch

$$\langle \omega, c\rangle = \int_Y c^*(\omega).$$

(i) Die Einschränkung dieser Paarung auf $Z^p(X,\mathbb{R})\times Z_p(X)$ hängt nur von Kohomologie- bzw. Homologieklassen ab, wir erhalten also eine Paarung

$$H^p(X,\mathbb{R}) \times H_p(X) \to \mathbb{R}.$$

(ii) Ist $f : X_1 \to X_2$ ein glatter Morphismus, so gilt

$$\langle f^*(\omega), c\rangle = \langle \omega, f_*(c)\rangle.$$

Beweis. (i) Sind c_1 und c_2 homolog, also $c_1 - c_2 = \partial b$ für eine $(p+1)$-Kette $b : W \to X$, so ist

$$\begin{aligned}\langle \omega, c_1 - c_2\rangle &= \int_{Y_1} c_1^*(\omega) - \int_{Y_2} c_2^*(\omega)\\ &= \int_{\partial W} b^*(\omega) = \int_W d(b^*(\omega)) = \int_W b^*(d\omega) = 0,\end{aligned}$$

weil $d\omega = 0$, wobei wir die Verallgemeinerung von Satz 20 auf Polyeder und Satz 13 benutzt haben. Sind hingegen ω_1 und ω_2 kohomolog, also $\omega_1 - \omega_2 = d\psi$ mit $\psi \in \mathcal{E}^{p-1}(X)$, so ist

$$\langle \omega_1 - \omega_2, c\rangle = \int_Y c^*(d\psi) = \int_Y d(c^*(\psi)) = \int_{\partial Y} c^*(\psi) = 0,$$

weil $\partial Y = \emptyset$, wobei wir wieder Satz 13 und die Verallgemeinerung von Satz 20 benutzt haben.

(ii) folgt unmittelbar aus $c^* \circ f^* = (f \circ c)^*$. □

Ein glatter p-Zykel ist ein Paar (Y, c) bestehend aus einer glatten kompakten p-dimensionalen Mannigfaltigkeit Y ohne Rand und einem glatten Morphismus $c : Y \to X$. Bekanntlich existiert eine Triangulierung von Y, d. h. ein Homöomorphismus von Y mit einem endlichen Simplizialkomplex. Sind $Y_1, \ldots, Y_r$ die Simplexe maximaler Dimension und ist $c_i = c|_{Y_i}$, so ist $\tilde{c} = c_1 + \cdots + c_r \in Z_p(X)$, da sich die Terme von ∂c_i gegenseitig wegkürzen. Der singuläre Zykel $\tilde{c}$ hängt zwar von der Wahl der Triangulierung ab, aber man kann zeigen, dass seine Klasse in $H_p(X)$ eindeutig durch c bestimmt ist.

Ist X kompakt und orientiert, so erhalten wir aus dem glatten Zykel (X, id) die fundamentale Klasse von X. Weitere Beispiele von glatten Zykeln in projektiven Räumen sind die natürlichen Einbettungen $P(W) \to P(V)$, wobei W ein Unterraum des reellen, komplexen oder quaternionischen Vektorraums V ist. Im reellen Fall muss die Dimension von W gerade sein, denn sonst ist $P(W)$ nicht orientierbar. Man kann allerdings auch nichtorientierte

Ketten betrachten und so eine andere Version von Homologiegruppen definieren.

Homotope glatte Zykel c_0, $c_1 : Y \to X$ sind homolog. Sei nämlich $b : [0,1] \times Y \to X$ die Homotopie. Dann gilt

$$\partial([0,1] \times Y) = \{1\} \times Y \sqcup \{0\} \times (-Y),$$

und durch Triangulierung dieser Mannigfaltigkeit mit Rand erhalten wir eine singuläre Kette $\tilde{b}$ mit $\partial\tilde{b} = \tilde{c}_1 - \tilde{c}_0$. Für glatte singuläre Zykel ist der Begriff einer Homotopie nicht erklärt, statt dessen hat man folgendes Resultat.

Lemma 11 *Sind f_0, $f_1 : X \to X'$ glatt homotope Morphismen, so gibt es Abbildungen*

$$\Phi_p : C_p(X) \to C_{p+1}(X'),$$

die sich zu einer Abbildung Φ mit der Eigenschaft

$$\partial \circ \Phi + \Phi \circ \partial = f_{1,*} - f_{0,*}$$

zusammenfügen, und es gibt Abbildungen

$$\Psi^p : \mathcal{E}^p(X', \mathbb{R}) \to \mathcal{E}^{p-1}(X, \mathbb{R}),$$

die sich zu einer Abbildung Ψ mit der Eigenschaft

$$d \circ \Psi + \Psi \circ d = f_1^* - f_0^*$$

zusammenfügen. Für $c \in Z_p(X)$ sind $f_{0,*}(c)$ und $f_{1,*}(c)$ homolog, und für $\omega \in Z^p(X', \mathbb{R})$ sind $f_0^*(\omega)$ und $f_1^*(\omega)$ kohomolog.

Abbildungen Φ und Ψ mit den angegebenen Eigenschaften nennt man Kettenhomotopien.

Beweis. Es sei $F : [0,1] \times X \to X'$ die Homotopie. Ist c ein glatter Zykel auf X, so ist die Homotopie $b : [0,1] \times Y \to X'$ zwischen $f_{0,*}(c)$ und $f_{1,*}(c)$ gegeben durch

$$b(t, y) = F(t, c(y)).$$

Diese Formel definiert sogar für eine p-Kette c eine $(p+1)$-Kette $b = \Phi(c)$. Wegen

$$\partial([0,1] \times Y) = \{1\} \times Y \sqcup \{0\} \times (-Y) \sqcup [0,1] \times \partial(-Y)$$

folgt

$$\partial(b) = f_{1,*}(c) - f_{0,*}(c) - \Phi(\partial(c))$$

Ist c ein Zykel, so verschwindet der zweite Term auf der linken Seite.

Zur Definition von Ψ betrachten wir die Einbettung $i_t : X \to [0,1] \times X$ und das Vektorfeld v auf $[0,1] \times X$, die gegeben sind durch

$$i_t(x) = (t, x), \qquad v(f) = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Wir definieren Ψ durch

$$\Psi(\omega) = \int_0^1 i_t^*(\iota_v F^*(\omega))\, dt,$$

Dann gilt nach den Sätzen 13 und 17

$$\begin{aligned} d(\Psi(\omega)) + \Psi(d\omega) &= \int_0^1 i_t^*\big((d \circ \iota_v + \iota_v \circ d) F^*(\omega)\big) dt \\ &= \int_0^1 i_t^*(\mathcal{L}_v F^*(\omega))\, dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\, i_t^*(F^*(\omega))\, dt \\ &= i_1^*(F^*(\omega)) - i_0^*(F^*(\omega)) = f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega). \end{aligned}$$

Ist ω geschlossen, so verschwindet der zweite Term auf der linken Seite. $\square$

12 Prägarben und Garben

Definition 29 *Für jede offene Menge U eines topologischen Raumes X sei eine Menge $\mathcal{F}(U)$ gegeben, und für jedes Paar $V \subset U$ offener Mengen von X sei eine Abbildung $r_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ gegeben. Die Zuordnung $\mathcal{F}$ zusammen mit den Abbildungen r heißt Prägarbe auf X, wenn folgendes gilt:*

(i) r_U^U ist die identische Abbildung von $\mathcal{F}(U)$ für alle U,

(ii) $r_W^V \circ r_V^U = r_W^U$ für alle $W \subset V \subset W$.

Ein Morphismus von $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Prägarben auf X ist eine Familie von Abbildungen $h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle r_V^U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_V^U} \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) \end{array} \tag{11}$$

für offene Mengen $V \subset U$ kommutativ sind, wobei ρ die entsprechenden Einschränkungsabbildungen von $\mathcal{G}$ bezeichnet.

Sind die $\mathcal{F}(U)$ Teilmengen von $\mathcal{G}(U)$ und werden sie von den ρ_V^U in $\mathcal{F}(V)$ abgebildet, so nennt man $\mathcal{F}$ zusammen mit den Einschränkungen von ρ eine Unterprägarbe von $\mathcal{G}$.

Ist U eine offene Teilmenge von X, so definieren wir die Einschränkung $\mathcal{F}|_U$ der Prägarbe $\mathcal{F}$ durch $\mathcal{F}|_U(W) = \mathcal{F}(W)$ für alle offenen Mengen W von U.

Beispiel 1. Jede Funktionenprägarbe ist eine Prägarbe.
Beispiel 2. Ist $\pi : E \to X$ eine stetige Abbildung und setzen wir

$$\mathcal{F}(U) = \{s : U \to E \mid s \text{ ist stetig}, \pi \circ s = \mathrm{id}_U\},$$

so ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe. Als Spezialfall erhalten wir die Prägarbe der Schnitte eines lokal-trivialen Faserbündels.

Definition 30 *Eine Prägarbe $(\mathcal{F}, r)$ heißt Garbe, wenn für jede Familie offener Mengen $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ in X folgendes gilt, wobei wir*

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

setzen:

(iii) Sind s, $t \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$r^U_{U_\alpha}(s) = r^U_{U_\alpha}(t)$$

für alle $\alpha \in A$, so gilt $s = t$.

(iv) Ist für jedes $\alpha \in A$ ein $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ gegeben und gilt

$$r^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\alpha) = r^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\beta)$$

für alle α, $\beta \in A$, so gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $r^U_{U_\alpha}(s) = s_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.

Ein Morphismus von Garben ist ein Morphismus der entsprechenden Prägarben.

Die Einschränkung einer Garbe auf eine offene Teilmenge ist eine Garbe. Eine Funktionenprägarbe ist genau dann eine Garbe, wenn sie eine Funktionengarbe im Sinne der Definition 5 ist. Die Prägarbe aus Beispiel 2 ist eine Garbe. In beiden Beispielen von Pägarben ist die Eigenschaft (iii) erfüllt.

Definition 31 *Ist $(\mathcal{F}, r)$ eine Garbe und sind die Mengen $\mathcal{F}(U)$ mit der Struktur von Gruppen versehen, wobei die Abbildungen r^U_V Gruppenhomomorphismen sind, so nennt man $\mathcal{F}$ eine Garbe von Gruppen. Ein Morphismus h von Garben, bei dem jedes h_U ein Gruppenhomomorphismus ist, heißt*

Morphismus von Garben von Gruppen. Analog definiert man (Prä-) Garben von abelschen Gruppen, von Ringen usw.

Ist $(\mathcal{R}, \rho)$ eine Garbe von kommutativen Ringen und $(\mathcal{M}, r)$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf demselben Raum X, und ist für jede offene Menge U in X die Gruppe $\mathcal{M}(U)$ mit der Struktur eines $\mathcal{R}(U)$-Moduls versehen, so dass für $V \subset U$, $\lambda \in \mathcal{R}(U)$ und $s \in \mathcal{M}(U)$ gilt

$$r_V^U(\lambda s) = \rho_V^U(\lambda) r_V^U(s),$$

so heißt $\mathcal{M}$ eine Garbe von $\mathcal{R}$-Moduln.

Bemerkung. Ein Funktor ordnet jedem Objekt der einen Kategorie ein Objekt der anderen und jedem Morphismus der einen Kategorie einen Morphismus der anderen zu, wobei identische Morphismen in identische Morphismen und Kompositionen in die entsprechenden Kompositionen der Bildmorphismen überführt werden. Wir erhalten beispielsweise eine Kategorie, wenn wir als Objekte die offenen Mengen eines vorgegebenen topologischen Raumes X und als Morphismen die Inklusionsabbildungen $V \hookrightarrow U$ nehmen. Man kann eine Prägarbe von Mengen bzw. Gruppen usw. auch als einen kontravarianten (d. h. richtungsumkehrenden) Funktor aus der Kategorie der offenen Mengen von X in die Kategorie von Mengen bzw. Gruppen usw. definieren. Alle Funktoren zwischen zwei vorgegebenen Kategorien bilden die Objekte einer neuen Kategorie. Ein Morphismus zwischen zwei Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist eine Familie von Morphismen $h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, so dass das Diagramm (11) kommutiert. Ein Morphismus von Prägarben ist also nichts anderes als ein Morphismus von Funktoren.

Beispiel 3. Es sei $E \to X$ ein Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{S})$ und $\mathcal{F}$ die Garbe der Schnitte von E. Dann ist $\mathcal{F}$ eine Garbe von $\mathcal{S}$-Moduln.

Im Zusammenhang mit Strukturgarben von Mannigfaltigkeiten hatten wir den Keim einer Funktione eingeführt. Dies verallgemeinert sich wie folgt auf Prägarben.

Definition 32 *Es sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X und $a \in X$. Auf der Menge der Paare (U, s), wobei U eine Umgebung von a und $s \in \mathcal{F}(U)$ ist, führen wir eine Äquivalenzrelation ein, indem wir festlegen, dass $(U, s) \sim (V, t)$ genau dann, wenn es eine Umgebung W von a in $U \cap V$ gibt, so dass*

$$r_W^U(s) = r_W^V(t).$$

Die Äquivalenzklasse von (U, s) nennen wir den Keim von s an der Stelle a und bezeichnen ihn mit $r_a^U(s)$. Die Menge der Äquivalenzklassen nennen wir den Halm $\mathcal{F}_a$ von $\mathcal{F}$ an der Stelle a.

Ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von Gruppen, Ringen usw., so erbt $\mathcal{F}_a$ die Struktur einer Gruppe, eines Ringes usw., und die Abbildungen $r_a^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_a$ sind Homomorphismen.

Lemma 12 *Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe und $s,\ t \in \mathcal{F}(U)$, so gilt $s = t$ genau dann, wenn $r_a^U(s) = r_a^U(t)$ für alle $a \in U$.*

Beweis. Ist $r_a^U(s) = r_a^U(t)$, so gibt es eine Umgebung U_a von a, so dass $r_{U_a}^U(s) = r_{U_a}^U(t)$. Da die Mengen U_a eine Überdeckung von U bilden, folgt aus der Garbeneigenschaft (iii), dass $s = t$. Die Umkehrung ist offensichtlich. □

Definition 33 *Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ (Prä-) Garben von abelschen Gruppen, so definieren wir die (Prä-) Garben von abelschen Gruppen $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ durch*

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}(U) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U).$$

Eine Garbe von $\mathcal{R}$-Moduln heißt frei, wenn sie isomorph zu

$$\mathcal{R}^p = \underbrace{\mathcal{R} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}}_{p}$$

für ein $p \in \mathbb{N}$ ist, und lokal frei, wenn jeder Punkt von X eine Umgebung U besitzt, so dass $\mathcal{M}|_U$ frei ist.

Zur Formulierung des folgenden Satzes brauchen wir den Begriff einer Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Dies ist ein Funktor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, für den es einen Funktor $S : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gibt, so dass $S \circ T$ isomorph zum identischen Funktor von $\mathcal{A}$ und $T \circ S$ isomorph zum identischen Funktor von $\mathcal{B}$ ist.

Satz 29 *Ist $(X, \mathcal{S})$ eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, dann ist die Kategorie der $\mathcal{S}$-Vektorbündel über X äquivalent zur Kategorie der lokal freien Garben von $\mathcal{S}$-Moduln über X.*

Beweis. Es sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel über X. Dann definieren wir eine Garbe auf X, indem wir einer offenen Menge U den $\mathcal{S}(U)$-Modul $\Gamma(U, E)$ der Schnitte von E über U zuordnen. Aus der lokalen Trivialität von E folgert man leicht, dass die Garbe $\Gamma(E)$ lokal frei ist. Dies definiert einen Funktor Γ.

Ist $a \in X$, so definieren wir

$$\mathcal{S}_a^1 = \{f_a \in \mathcal{S}_a \mid f(a) = 0\}.$$

Dies ist ein Ideal im Halm $\mathcal{S}_a$, und $\mathcal{S}_a/\mathcal{S}_a^1$ ist isomorph zum Grundkörper K. Nun sei $\mathcal{L}$ eine lokal freie Garbe von $\mathcal{S}$-Moduln auf X. Wir setzen

$$E_a = \mathcal{L}_a/\mathcal{S}_a^1\mathcal{L}_a.$$

Mit Hilfe eines Isomorphismus $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{S}^p|_U$ findet man, dass $E_a \cong K^p$. Nun definiert man eine Strukturgarbe auf

$$E = \bigsqcup_{a \in X} E_a$$

genau wie bei der Konstruktion des Tangentialbündels. Auf diese Weise entsteht ein lokal-triviales Vektorbündel $E = B(\mathcal{L})$, und wir erhalten einen Funktor B.

Um zu zeigen, dass Γ und B zueinander inverse Äquivalenzen von Kategorien sind, muss man noch kanonische Isomorphismen $f : B(\Gamma(E)) \to E$ und $h : \mathcal{L} \to \Gamma(B(\mathcal{L}))$ konstruieren. Ist $v \in B(\Gamma(E))$, so wählen wir einen Repräsentanten $s \in \Gamma(U, E)$ mit $r_a^U(s) + \mathcal{S}_a^1 \Gamma(E)_a = v$ und setzen $f(v) = s(a)$. Ist U offen in X und $s \in \mathcal{L}(U)$, so definieren wir $h_U(s) : U \to B(\mathcal{L})$ durch $h_U(s)(a) = r_a^U(s) + \mathcal{S}_a^1 \mathcal{L}_a$. □

Man kann jeder Prägarbe auf kanonische Weise eine Garbe zuordnen. In einem Zwischenschritt wird dazu üblicherweise eine Überlagerung konstruiert.

Definition 34 *Eine stetige Abbildung $\pi : Y \to X$ zwischen topologischen Räumen heißt Überlagerung, wenn sie surjektiv und ein lokaler Homöomorphismus ist. Ein Schnitt von π über der offenen Menge U von X ist eine stetige Abbildung $f : U \to Y$ mit der Eigenschaft $\pi \circ f = \mathrm{id}_U$.*

Ist $g : Z \to X$ eine stetige Abbildung, so ist die induzierte Überlagerung die natürliche Projektion $g^*(Y) \to Z$, wobei

$$g^*(Y) = \{(y, z) \in Y \times Z \mid \pi(y) = g(z)\}.$$

Natürlich kann man auch die induzierte Überlagerung durch eine Universalitätseigenschaft charakterisieren. Jeder Schnitt $f : U \to Y$ ist ein Homöomorphismus von U auf $f(U)$. Man erhält daraus einen Schnitt $g^{-1}(U) \to g^*(Y)$ der induzierten Überlagerung durch $z \mapsto (f(g(z)), z)$.

Lemma 13 *Es sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Wir setzen*

$$\tilde{\mathcal{F}} = \bigsqcup_{a \in X} \mathcal{F}_a$$

und bezeichnen mit $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \to X$ die natürliche Projektion. Für jede offene Menge U von X und $s \in \mathcal{F}(U)$ definieren wir $\tilde{s} : U \to \tilde{\mathcal{F}}$ durch $\tilde{s}(a) = r_a^U(s)$.

Die Familie aller Mengen der Form $\tilde{s}(U)$, wobei U offen in X und $s \in \mathcal{F}(U)$ ist, bildet die Basis einer Topologie von $\tilde{\mathcal{F}}$, bezüglich derer π eine Überlagerung ist und die Abbildungen $\tilde{s}$ Schnitte sind.

Es sei $\Delta : X \to X \times X$ die Diagonaleinbettung $\Delta(x) = (x, x)$, so dass

$$\Delta^*(\tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}}) = \{(\sigma, \tau) \in \tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}} \mid \pi(\sigma) = \pi(\tau)\}.$$

Ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen, so ist die Abbildung

$$\mu : \Delta^*(\tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}}) \to \tilde{\mathcal{F}}, \qquad \mu(\sigma, \tau) = \sigma - \tau,$$

stetig.

Beweis. Für $s \in \mathcal{F}(U)$ und $t \in \mathcal{F}(V)$ ist $W = \{x \in U \cap V \mid r_x^U(s) = r_x^V(t)\}$ nach Definition der Keime offen, und $\tilde{s}(U) \cap \tilde{t}(V) = \tilde{s}(W) = \tilde{t}(W)$, also ist die Familie dieser Mengen die Basis einer Topologie. In derselben Situation gilt $\tilde{s}^{-1}(\tilde{t}(V)) = W$, also ist $\tilde{s}$ stetig. Offensichtlich gilt $\pi \circ \tilde{s} = \mathrm{id}_U$, also ist $\tilde{s}$ ein Schnitt und somit injektiv. Natürlich ist auch $\pi|_{\tilde{s}(U)}$ stetig, also ist π ein lokaler Homöomorphismus.

Es sei $(\sigma, \tau) \in \mathcal{F}_a \times \mathcal{F}_a$. Eine Umgebung von $\mu(\sigma, \tau)$ enthält eine Menge der Form $\tilde{u}(W)$, wobei W eine Umgebung von a und $u \in \mathcal{F}(W)$ mit $\tilde{u}(a) = \mu(\sigma, \tau)$ ist. Wir wählen Repräsentanten (U, s) von σ und (V, t) von τ. Wegen

$$r_a^U(s) - r_a^V(t) = \sigma - \tau = r_a^W(u)$$

gibt es eine Umgebung R von a in $U \cap V \cap W$, so dass

$$r_R^U(s) - r_R^V(t) = r_R^W(u).$$

Dies bedeutet, dass für alle $x \in R$ gilt $\mu(\tilde{s}(x), \tilde{t}(x)) = \tilde{u}(x)$, so dass

$$\tilde{s}(R) \times \tilde{t}(R) \cap \Delta^*(\tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}}) \subset \mu^{-1}(\tilde{u}(W)).$$

Links steht eine Umgebung des Punktes (σ, τ) in $\Delta^*(\tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}})$, also ist μ an dieser Stelle stetig. □

Satz 30 *Es sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Dann gibt es eine Garbe $\bar{\mathcal{F}}$ auf X und einen Morphismus $h_0 : \mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$ von Prägarben auf X, so dass für jede Garbe $\mathcal{G}$ auf X und jeden Morphismus $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben auf X genau ein Morphismus $b : \bar{\mathcal{F}} \to \mathcal{G}$ von Garben auf X existiert, so dass $h = b \circ h_0$. Analoges gilt für Prägarben von abelschen Gruppen usw.*

Natürlich ist $\bar{\mathcal{F}}$ dadurch bis auf kanonische Isomorphismen bestimmt. Ist $\mathcal{F}$ bereits eine Garbe, so können wir für h die identische Abbildung von $\mathcal{F}$ nehmen und erhalten $\bar{\mathcal{F}} \cong \mathcal{F}$.

Beweis. Wir setzen

$$\bar{\mathcal{F}}(U) = \Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}}).$$

Nach Beispiel 2 ist $\bar{\mathcal{F}}$ eine Garbe. Außerdem definieren wir $h_{0,U} : \mathcal{F}(U) \to \bar{\mathcal{F}}(U)$ durch $h_{0,U}(s) = \tilde{s}$. Dann ist h_0 ein Morphismus von Prägarben.

Ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen und $f,\ g \in \bar{\mathcal{F}}(U)$, so definieren wir $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$. Dann ist $f - g$ als Verkettung der Abbildungen

$$U \xrightarrow{(f,g)} \Delta^*(\tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\mu} \tilde{\mathcal{F}}$$

nach Lemma 13 stetig, also $f - g \in \bar{\mathcal{F}}(U)$, und $\bar{\mathcal{F}}$ wird zu einer Garbe von abelschen Gruppen. Analoges zeigt man für andere algebraische Strukturen.

Zum Beweis der Universalität betrachten wir eine Garbe $\mathcal{G}$ und einen Morphismus $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben. Für jede offene Menge U und jedes $f \in \bar{\mathcal{F}}(U)$ müssen wir $b_U(f) \in \mathcal{G}(U)$ konstruieren. Ist $a \in U$, so wählen wir einen Repräsentanten (V, s) von $f(a) \in \mathcal{F}_a$. Dann ist $U_a = f^{-1}(\tilde{s}(V))$ eine Umgebung von a, und setzen wir $s_a = r^V_{U_a}(s)$, so gilt $f|_{U_a} = \widetilde{s_a}$. Wenn b existiert, so muss gelten

$$b_{U_a}(f|_{U_a}) = b_{U_a}(h_{0,U_a}(s_a)) = h_{U_a}(s_a),$$

und da h ein Morphismus von Prägarben ist,

$$\rho^U_{U_a}(b_U(f)) = h_{U_a}(s_a).$$

Da die Mengen U_a eine Überdeckung von U bilden, ist aufgrund der Garbeneigenschaft (iii) damit $b_U(f)$ eindeutig bestimmt, also existiert höchstens ein Morphismus b.

Um die Existenz zu beweisen, betrachten wir zwei beliebige Punkte a, $b \in U$. Für alle $x \in U_a \cap U_b$ gilt

$$\widetilde{s_a}(x) = f(x) = \widetilde{s_b}(x).$$

Da h auch eine Abbildung $h_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ mit $h_x \circ r^U_x = \rho^U_x \circ h_U$ induziert, folgt

$$\rho^{U_a}_x(h_{U_a}(s_a)) = \rho^{U_b}_x(h_{U_b}(s_b)),$$

also wegen Lemma 12

$$\rho^{U_a}_{U_a \cap U_b}(h_{U_a}(s_a)) = \rho^{U_b}_{U_a \cap U_b}(h_{U_b}(s_b)).$$

Aufgrund der Garbeneigenschaft (iv) existiert also ein $t \in \mathcal{G}(U)$, so dass

$$\rho^U_{U_a}(t) = h_{U_a}(s_a),$$

und wir können $h_U(f) = t$ setzen. □

Bemerkung. Offensichtlich gilt $\bar{\mathcal{F}}_a = \mathcal{F}_a$ für jeden Punkt $a \in X$.

Lemma 14 *Ist* $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *ein Morphismus von Garben und ist* $h_a : \mathcal{F}_a \to \mathcal{G}_a$ *für jedes* $a \in X$ *bijektiv, so ist* h *ein Isomorphismus.*

Beweis. Es sei $t \in \mathcal{G}(U)$. Für jedes $a \in U$ gibt es wegen der Surjektivität von h_a eine offene Umgebung U_a von a in U und ein $s_a \in \mathcal{F}(U_a)$, so dass $h_{U_a}(s_a) = \rho^U_{U_a}(t)$, also $h_x(\widetilde{s_a}(x)) = \tilde{t}(x)$ für $x \in U_a$. Ist b ein anderer Punkt in U, so folgt für alle $x \in U_a \cap U_b$, dass $h_x(\widetilde{s_a}(x)) = h_x(\widetilde{s_b}(x))$, wegen der Injektivität von h_x also $\widetilde{s_a}(x) = \widetilde{s_b}(x)$, und nach Lemma 12 ist $r^{U_a}_{U_a \cap U_b}(s_a) = r^{U_b}_{U_a \cap U_b}(s_b)$. Aufgrund der Garbeneigenschaft (iv) von $\mathcal{F}$ gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $r^U_{U_a}(s) = s_a$, also $\rho^U_{U_a}(h_U(s)) = \rho^U_{U_a}(t)$, und aufgrund der Garbeneigenschaft (iii) von $\mathcal{G}$ gilt $h_U(s) = t$. Somit ist h_U surjektiv, und die Injektivität folgt aus Lemma 12. Man prüft leicht, dass die Abbildungen $g_U = h_U^{-1}$ mit den Einschränkungsabbildungen verträglich sind, also einen Morphismus $g : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ definieren, der zu h invers ist. $\square$

13 Exakte Folgen

Definition 35 *Eine Folge*

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$$

von Homomorphismen abelscher Gruppen heißt exakt, wenn für jedes p *gilt*

$$\operatorname{Im} f_{p-1} = \operatorname{Ker} f_p.$$

Analog definiert man die Exaktheit einer unendlichen Folge. Eine nach beiden Seiten unbeschränkte exakte Folge nennt man lange exakte Folge.

Beispiel. Die Folge

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B$$

ist genau dann exakt, wenn g ein Monomorphismus ist. Die Folge

$$B \xrightarrow{h} C \longrightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn h ein Epimorphismus ist. Eine exakte Folge der Form

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

nennt man kurze exakte Folge. Vernachlässigt man die konkreten Abbildungen, so sagt sie aus, dass man A mit einer Untergruppe von B identifizieren kann und dass dann $B/A \cong C$ ist.

Wir wollen analoge Begriffe für Folgen von Morphismen von (Prä-) Garben von abelschen Gruppen über einem festen topologischen Raum X definieren. Hier gibt es eine triviale Garbe und zwischen beliebigen Garben einen trivialen Morphismus, die wir beide mit 0 bezeichnen. Im Folgenden meinen wir mit (Prä-) Garben immer (Prä-) Garben von abelschen Gruppen über X.

Definition 36 *Es sei $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Morphismus von Garben.*

- *Die Garbe $\mathcal{K}$ mit dem Morphismus $i : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ heißt Kern von f, wenn $f \circ i = 0$ gilt und es für jeden Morphismus $g : \mathcal{G} \to \mathcal{A}$ von Garben mit $f \circ g = 0$ genau einen Morphismus $h : \mathcal{G} \to \mathcal{K}$ mit $g = i \circ h$ gibt.*
- *Die Garbe $\mathcal{Q}$ mit dem Morphismus $q : \mathcal{B} \to \mathcal{Q}$ heißt Kokern von f, wenn $q \circ f = 0$ gilt und es für jeden Morphismus $g : \mathcal{B} \to \mathcal{G}$ von Garben mit $g \circ f = 0$ genau einen Morphismus $h : \mathcal{Q} \to \mathcal{G}$ mit $g = h \circ q$ gibt.*

Analog definiert man Kern und Kokern in der Kategorie der Prägarben.

Man kann natürlich auch für Homomorphismen abelscher Gruppen Kern und Kokern auf diese (etwas umständliche) Weise definieren, und es ist eine amüsante Übung, sich klarzumachen, dass dies mit der klassischen Definition übereinstimmt. Natürlich sind Kern und Kokern nun wie alle universellen Objekte nur bis auf kanonische Isomorphismen definiert, und ihre Existenz ist nicht offensichtlich.

Satz 31 *Es sei $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Morphismus von Prägarben. Für jedes offene U in X setzen wir*

$$\mathcal{K}(U) = \operatorname{Ker} f_U, \qquad \mathcal{P}(U) = \operatorname{Koker} f_U$$

und bezeichnen mit

$$i_U : \mathcal{K}(U) \to \mathcal{A}(U), \qquad p_U : \mathcal{B}(U) \to \mathcal{P}(U)$$

die natürlichen Abbildungen. Dann ist $\mathcal{K}$ mit $i : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ der Kern von f und $\mathcal{P}$ mit $p : \mathcal{B} \to \mathcal{P}$ der Kokern von f in der Kategorie der Prägarben.

Ist f ein Morphismus von Garben, so ist $\mathcal{K}$ auch der Kern von f in der Kategorie der Garben. Weiter sei $r : \mathcal{P} \to \bar{\mathcal{P}}$ der natürliche Morphismus aus Satz 30. Dann ist $\bar{\mathcal{P}}$ mit dem Morphismus $q = r \circ p$ der Kokern von f in der Kategorie der Garben.

Beweis. Es ist klar, dass $\mathcal{K}$ eine Prägarbe und i ein Morphismus ist. Nun sei $g : \mathcal{G} \to \mathcal{A}$ ein Morphismus mit $f \circ g = 0$. Wenn der gesuchte Morphismus h existiert, so muss für alle U gelten $g_U = i_U \circ h_U$. In der Tat gibt es wegen $f_U \circ g_U = 0$ genau einen Homomorphismus $h_U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{K}(U)$ mit dieser Eigenschaft, denn wir könnten auch $\operatorname{Ker} f_U$ als universelles Objekt definieren. Um die Existenz von h zu zeigen, nehmen wir diese Homomorphismen h_U. Für $V \subset U$ gilt (wobei wir die Einschränkungshomomorphismen verschiedener Prägarben von U nach V mit r bezeichnen)

$$i_V \circ h_V \circ r = g_V \circ r = r \circ g_U = r \circ i_U \circ h_U = i_V \circ r \circ h_U.$$

Wegen der Injektivität von i_V folgt $h_V \circ r = r \circ h_U$, also bilden die h_U einen Morphismus h von Prägarben. Damit hat $i : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ die Universalitätseigenschaft des Kerns.

Nun seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Garben. Ist eine Familie $s_\alpha \in \mathcal{K}(U_\alpha)$ wie in der Garbendefinition gegeben, so gibt es wegen der Garbeneigenschaft (iv) von $\mathcal{A}$ ein $s \in \mathcal{A}(U)$ mit $r^U_{U_\alpha}(s) = s_\alpha$. Es gilt

$$r^U_{U_\alpha}(f_U(s)) = f_{U_\alpha}(s_\alpha) = 0,$$

und wegen der Garbeneigenschaft (iii) von $\mathcal{B}$ ist $f_U(s) = 0$. Somit hat auch $\mathcal{K}$ die Eigenschaft (iv). Die Eigenschaft (iii) für $\mathcal{K}$ sieht man leicht.

Die Aussagen über den Kokern $p : \mathcal{B} \to \mathcal{P}$ des Morphismus von Prägarben beweist man wie für den Kern. Insbesondere gibt es zu jedem Morphismus $g : \mathcal{B} \to \mathcal{G}$ mit $g \circ f = 0$ genau einen Morphismus $k : \mathcal{P} \to \mathcal{G}$ mit $g = k \circ p$.

Nun seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{G}$ Garben. Nach Satz 30 gibt es genau einen Morphismus $h : \bar{\mathcal{P}} \to \mathcal{G}$ mit $k = h \circ r$, also $g = h \circ q$. Um zu zeigen, dass h durch letztere Eigenschaft eindeutig bestimmt ist, genügt es, den Fall $g = 0$ zu betrachten. Dann ist $h \circ r \circ p = 0$, also $h_U \circ r_U \circ p_U = 0$ für alle U. Wegen der Surjektivität von p_U folgt $h_U \circ r_U = 0$, also $h \circ r = 0$, und wegen der Eindeutigkeit von h folgt $h = 0$. □

Beispiel 1. Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit und Z eine Untermannigfaltigkeit von X. Definieren wir eine Prägarbe $\mathcal{P}$ auf X durch $\mathcal{P}(U) = \{\varphi|_{U \cap Z} \mid \varphi \in \mathcal{S}(U)\}$, so erhalten wir einen Morphismus $f : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ von Prägarben, und $\mathcal{I} = \operatorname{Ker} f$ ist eine Idealgarbe in $\mathcal{S}$. Nun ist $\mathcal{P}$ der Kokern des natürlichen Morphismus $\mathcal{I} \to \mathcal{S}$ in der Kategorie der Prägarben auf X. Im Falle parakompakter glatter Hausdorffscher Mannigfaltigkeiten ist $\mathcal{P}$ automatisch eine Garbe, aber im Allgemeinen ist das nicht der Fall. Wir erhalten eine Folge von Prägarben

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow 0.$$

Mitunter schreibt man $i = \ker f$ und $q = \operatorname{koker} f$, so dass wir eine Folge

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\ker f} \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{\operatorname{koker} f} \operatorname{Koker} f \longrightarrow 0$$

erhalten. Es gilt

$$\operatorname{Ker}(\ker f) = 0, \qquad \operatorname{Koker}(\operatorname{koker} f) = 0.$$

Ist nämlich $h : \mathcal{G} \to \operatorname{Ker} f$ ein Morphismus mit $\ker(f) \circ h = 0$, so ist h im Sinne der Definition des Kerns dem Morphismus $0 : \mathcal{G} \to \mathcal{A}$ zugeordnet. Dasselbe gilt auch für den Nullmorphismus anstelle von h, und wegen der Eindeutigkeit ist $h = 0$. Der Beweis für den Kokern ist analog.

Lemma 15 *Für jeden Punkt $x \in X$ gilt*

$$(\operatorname{Ker} f)_x \cong \operatorname{Ker} f_x, \qquad \operatorname{Koker} f_x \cong (\operatorname{Koker} f)_x.$$

Beweis. In den Bezeichnungen von Satz 31 ist $\mathcal{P}_x = \bar{\mathcal{P}}_x$, darum genügt es, den Beweis für den Fall von Prägarben zu führen. Es gilt $p_x \circ f_x \circ r_x^U = r_x^U \circ p_U \circ f_U = 0$, und da $\mathcal{A}_x$ die Vereinigung der Bilder der r_x^U ist, folgt $p_x \circ f_x = 0$, so dass es genau einen Homomorphismus $u_x : \operatorname{Koker} f_x \to \mathcal{P}_x$ mit $p_x = u_x \circ \operatorname{koker} f_x$ gibt.

Ist $\sigma \in \operatorname{Ker} p_x$ mit Repräsentant (U, t), so gibt es eine Umgebung V von x in U, so dass $p_V(r_V^U(t)) = r_V^U(p_U(t)) = 0$, also $r_V^U(t) \in \operatorname{Ker} p_V = \operatorname{Im} f_V$. Wählen wir $s \in \mathcal{A}(V)$ mit $f_V(s) = r_V^U(t)$, so folgt $\sigma = f_x(r_x^V(s)) \in \operatorname{Im} f_x = \operatorname{Ker}(\operatorname{koker} f_x)$. Also ist u_x injektiv. Man sieht leicht, dass p_x surjektiv ist, und darum ist auch u_x surjektiv.

Der Beweis für den Kern ist ähnlich, aber einfacher. □

Um auch für Folgen von Morphismen von (Prä-) Garben den Begriff der Exaktheit definieren zu können, fehlt uns noch der Begriff des Bildes. Da alles dualisiert werden kann, gibt es auch noch ein Kobild.

Definition 37 *Man setzt*

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(\operatorname{koker} f), \qquad \operatorname{Koim} f = \operatorname{Koker}(\ker f).$$

Im Fall eines Gruppenhomomorphismus $f : A \to B$ ist $\operatorname{Im} f = f(A)$ und $\operatorname{Koim} f = A / \operatorname{Ker} f$, und der Homomorphiesatz besagt $\operatorname{Koim} f = \operatorname{Im} f$. Auch im Falle von Garbenmorphismen gibt es einen kanonischen Homomorphismus

$$i : \operatorname{Koim} f \to \operatorname{Im} f.$$

Wegen $\mathrm{koker}(f) \circ f = 0$ gibt es nämlich genau einen Morphismus $g : \mathcal{A} \to \mathrm{Im}\, f$ mit $f = \mathrm{im}(f) \circ g$. Nun gilt $\mathrm{im}(f) \circ g \circ \ker(f) = f \circ \ker(f) = 0$, also lässt sich $g \circ \ker(f)$ durch $\mathrm{Ker}(\mathrm{im}(f))$ schicken, was aber gleich Null ist. Somit ist $g \circ \ker(f) = 0$, und die Existenz von i folgt.

All dies gilt in beliebigen Kategorien, in denen Kerne und Kokerne existieren, aber im Fall von Garben von abelschen Gruppen ist i wegen Lemma 14 ein Isomorphismus, und wir identifizieren das Kobild mit dem Bild.

Nun betrachten wir zwei Morphismen

$$\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C}$$

mit der Eigenschaft $h \circ g = 0$. Dann ist $h \circ \mathrm{im}(g) \circ \mathrm{koim}(g) = h \circ g = 0$, und wegen $\mathrm{Koker}(\mathrm{koim}\, g) = 0$ folgt $h \circ \mathrm{im}(g) = 0$, so dass genau ein Morphismus $f : \mathrm{Im}\, g \to \mathrm{Ker}\, h$ mit der Eigenschaft $\ker(h) \circ f = \mathrm{im}(g)$ existiert. Wegen $\mathrm{Ker}(\mathrm{im}\, g) = 0$ ist auch $\mathrm{Ker}\, f = 0$.

Definition 38 *Ein Komplex von (Morphismen von) Garben*

$$\mathcal{A}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{A}^n$$

heißt exakte Folge, wenn die natürlichen Morphismen $\mathrm{Im}\, d_{p-1} \to \mathrm{Ker}\, d_p$ *für alle* p *Isomorphismen sind. Analog definiert man unendliche exakte Folgen.*

Für die Exaktheit gibt es ein einfaches Kriterium.

Lemma 16 *Eine Folge von Morphismen von Garben auf* X *ist genau dann exakt, wenn für jedes* $x \in X$ *die Folge der Halme exakt ist.*

Beweis. Angenommen, die Folge der Halme ist exakt. Dann ist $(d_p)_x \circ (d_{p-1})_x = 0$. Wegen Lemma 12 ist dann auch $d_p \circ d_{p-1} = 0$, also ist die Folge von Garben ein Komplex. Außerdem sind die natürlichen Abbildungen

$$\mathrm{Im}(d_{p-1})_x \to \mathrm{Ker}(d_p)_x$$

Isomorphismen. Mit Hilfe von Lemma 15 können wir diese Isomorphismen als

$$(\mathrm{Im}\, d_{p-1})_x \to (\mathrm{Ker}\, d_p)_x$$

schreiben. Letztere Abbildungen sind von den natürlichen Morphismen

$$\mathrm{Im}\, d_{p-1} \to \mathrm{Ker}\, d_p$$

induziert. Nach Lemma 14 sind auch diese Isomorphismen, also ist der Komplex von Garben exakt. Die Umkehrung ist trivial. □

Manche Autoren geben das Kriterium aus Lemma 16 als ad-hoc-Definition der Exaktheit von Folgen von Garben. Wir haben gesehen, dass dies die einzig vernünftige Definition ist.

Lemma 17 *Ist*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von Garben von abelschen Gruppen auf einem topologischen Raum X, so ist die Folge von abelschen Gruppen

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(X) \xrightarrow{g_X} \mathcal{B}(X) \xrightarrow{h_X} \mathcal{C}(X)$$

exakt.

(Beweis als Übungsaufgabe 29.)

Beispiel. Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit Strukturgarbe $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}^\times$ die Garbe der nirgends verschwindenden Funktionen (d. h. $\mathcal{O}^\times(U)$ ist die multiplikative Gruppe der invertierbaren Elemente in $\mathcal{O}(U)$). Wir betrachten die Folge von Garben von abelschen Gruppen

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^\times \longrightarrow 0,$$

wobei $e_U(f)(x) = \exp(2\pi i f(x))$ ist und $\underline{\mathbb{Z}}$ die (lokal) konstante Garbe mit Werten in $\mathbb{Z}$ bezeichnet, d. h. $\underline{\mathbb{Z}}(U) = \mathbb{Z}$ für alle zusammenhängenden U. Diese Folge ist exakt. Man findet z. B. ein Urbild eines Keimes $g_x \in \mathcal{O}_x^\times$ unter e_x mit Hilfe eines eines Zweiges des Logarithmus in einer Umgebung von $g(x) \neq 0$. Die induzierte Folge der Gruppen globaler Schnitte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i_X} \mathcal{O}(X) \xrightarrow{e_X} \mathcal{O}^\times(X) \longrightarrow 0$$

ist z. B. im Fall $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht exakt. Gäbe es nämlich ein Urbild f der Funktion $g(z) = z$ unter e_X, so wäre $f'(z) = \frac{1}{2\pi i z}$, also für jeden Zykel c in X

$$0 = \int_c f'(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z},$$

was zum Widerspruch führt, wenn c der Einheitskreis ist.

Wie wir sehen, ist die von einer kurzen exakten Folge von Garben induzierte Folge von Gruppen globaler Schnitte nicht immer exakt rechten Glied. Es gibt aber eine Klasse von Garben, für die das doch der Fall ist. Dazu müssen wir zunächst den Begriff eines Keims verallgemeinern.

Definition 39 *Es sei $\mathcal{F}$ eine (Prä-) Garbe auf X und $S \subset X$. Auf der Menge der Paare (U, s), wobei U eine Umgebung von S und $s \in \mathcal{F}(U)$ ist, führen wir eine Äquivalenzrelation ein, indem wir festlegen, dass $(U, s) \sim (V, t)$ genau dann, wenn es eine Umgebung W von S in $U \cap V$ gibt, so dass*

$$r_W^U(s) = r_W^V(t).$$

Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(S)$, die natürlichen Abbildungen $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(S)$ mit r_S^U.

Eine Garbe $\mathcal{F}$ heißt weich, wenn die Abbildungen r_S^X für alle abgeschlossenen Teilmengen S von X surjektiv sind, und sie heißt welk, wenn die Abbildungen r_U^X für alle offenen Teilmengen U von X surjektiv sind.

Ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen, so erbt $\mathcal{F}(S)$ diese Struktur, und die Abbildungen r_S^U sind Homomorphismen. Bei einer weichen Garbe ist natürlich r_S^U für jede abgeschlossene Teilmenge S einer beliebigen offenen Menge U surjektiv, denn $r_S^X = r_S^U \circ r_U^X$. Aus der letzten Gleichung folgt, dass jede welke Garbe weich ist, denn jedes Element von $\mathcal{F}(S)$ hat einen Repräsentanten (U, s). Natürlich kann man sogar r_S^T für beliebige Mengen $S \subset T$ definieren.

Satz 32 *Ist*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge von Garben auf einem parakompakten Hausdorffschen topologischen Raum X und ist $\mathcal{A}$ eine weiche Garbe, so ist die Folge abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(X) \xrightarrow{g_X} \mathcal{B}(X) \xrightarrow{h_X} \mathcal{C}(X) \longrightarrow 0$$

ebenfalls exakt.

Beweis. Wir wollen ein Urbild von $c \in \mathcal{C}(X)$ unter h_X finden. Aufgrund der Exaktheit ist dies lokal möglich, aber die lokalen Stücke müssen auf den Überlappungsmengen nicht übereinstimmen. Haben wir aber Urbilder auf abgeschlossenen Teilmengen, also $b' \in \mathcal{B}(S')$ mit $h(b') = c|_{S'}$ und $b'' \in \mathcal{B}(S'')$ mit $h(b'') = c|_{S''}$, so können wir in der Tat ein $b \in \mathcal{B}(S' \cup S'')$ mit $h(b) = c|_{S' \cup S''}$ finden. (Der Kürze halber schreiben wir $c|_S$ anstelle von $r_S^X(c)$ usw.)

Das Element $b'|_{S' \cap S''} - b''|_{S' \cap S''}$ wird nämlich von $h_{S' \cap S''}$ auf Null abgebildet, und das Gleiche gilt für einen Repräsentanten auf einer genügend kleinen Umgebung U von $S' \cap \mathcal{S}''$. Wenden wir Lemma 17 auf die Folge

$$0 \to \mathcal{A}|_U \to \mathcal{B}|_U \to \mathcal{C}|_U \to 0$$

an, so folgt, dass ein $a \in \mathcal{A}(S' \cap S'')$ mit $g(a) = b'|_{S' \cap S''} - b''|_{S' \cap S''}$ existiert. Da $\mathcal{A}$ eine weiche Garbe ist, gibt es ein $a'' \in \mathcal{A}(S'')$ mit $a''|_{S' \cap S''} = a$. Nun haben b' und $b'' + g(a'')$ dieselbe Einschränkung auf $S' \cap S''$, und da $\mathcal{B}$ eine Garbe ist, gibt es ein $b \in \mathcal{B}(S' \cup S'')$ mit den vorgegebenen Einschränkungen auf S' und S''. Die Einschränkungen von $h(b)$ auf S' und S'' stimmen mit denen von c überein, also ist $h(b) = c|_{S' \cup S''}$.

Wie schon angedeutet, ist h lokal surjektiv. Genauer ist jede Halmabbildung h_x wegen Lemma 16 surjektiv. Also gibt es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U_x und ein $b_x \in \mathcal{B}(U_x)$, so dass $h(b_x) = c|_{U_x}$. Da X parakompakt ist, existiert eine lokal endliche Überdeckung $\mathfrak{S}$ von X durch abgeschlossene Mengen, so dass jedes $S \in \mathfrak{S}$ in einem U_x enthalten ist.

Es sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller Paare (S, b), wobei S die Vereinigung einer Teilfamilie von $\mathfrak{S}$ und $b \in \mathcal{B}(S)$ mit $h(b) = c|_S$ ist. Wegen der lokalen Endlichkeit der Familie der S_α ist jedes solche S abgeschlossen. Wir schreiben $(S, b) \le (S', b')$, wenn $S \subset S'$ und $b = b'|_S$ ist. So wird $\mathfrak{F}$ zu einer nichtleeren geordneten Menge. Ist $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{F}$ eine Kette (d. h. linear geordnete Teilmenge) und $S_\mathfrak{K}$ die Vereinigung aller S mit $(S, b) \in \mathfrak{K}$, so wird durch

$$\tilde{b}_\mathfrak{K}|_S = \tilde{b} \quad \text{für jedes } (S, b) \in \mathfrak{K}$$

auf korrekte Weise ein Schnitt $\tilde{b}_\mathfrak{K} : S_\mathfrak{K} \to \tilde{\mathcal{B}}$, also ein $b_\mathfrak{K} \in \mathcal{B}(S_\mathfrak{K})$ mit $h(b_\mathfrak{K}) = c|_{S_\mathfrak{K}}$ definiert. Somit ist $(S_\mathfrak{K}, b_\mathfrak{K}) \in \mathfrak{F}$ eine obere Schranke von $\mathfrak{K}$. Nach dem Zornschen Lemma hat $\mathfrak{F}$ ein maximales Element (S_0, b_0). Wäre $S_0 \neq X$, so gäbe es ein $S \in \mathfrak{S}$ mit $S \not\subset S_0$, und wir könnten ein $(S_0 \cup S, b^*) \in \mathfrak{F}$ finden, was der Maximalität von S_0 widerspricht. □

Es ist klar, dass der Beweis für welke Garben $\mathcal{A}$ ohne die Voraussetzung der Parakompaktheit funktioniert.

Folgerung 7 *Ist*

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$$

eine exakte Folge von Garben auf einem parakompakten topologischen Raum und sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ weich, so ist auch $\mathcal{C}$ weich.

Beweis. Es sei S eine abgeschlossene Teilmenge von X und $c \in \mathcal{C}(S)$. Wir wählen einen Repräsentanten $(U, \tilde{c})$ und schränken alle drei Garben auf U ein. Da $\mathcal{A}|_U$ weich ist, liefert Satz 32 ein Urbild $\tilde{b} \in \mathcal{B}(U)$ von $\tilde{c}$, und $\tilde{b}|_S$ ist ein Urbild von c. Da $\mathcal{B}$ weich ist, setzt sich b zu einem Element von $\mathcal{B}(X)$ fort, dessen Bild in $\mathcal{C}(X)$ die gesuchte Fortsetzung von c ist. □

Folgerung 8 *Ist*

$$0 \to \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1 \to \mathcal{A}^2 \to \dots$$

eine exakte Folge weicher Garben auf einem parakompakten topologischen Raum X, so ist die Folge abelscher Gruppen

$$0 \to \mathcal{A}^0(X) \to \mathcal{A}^1(X) \to \mathcal{A}^2(X) \to \dots$$

ebenfalls exakt.

Beweis. Die zweite Folge ist zumindest ein Komplex. Man kann beide Komplexe nach links durch Nullen Fortsetzen. Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass $\mathcal{K}^p = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^{p+1})$ für alle p eine weiche Garbe ist. Nach Aufgabe 30 ist die Folge von Garben

$$0 \to \mathcal{K}^p \to \mathcal{A}^p \to \mathcal{K}^{p+1} \to 0$$

exakt, und nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathcal{K}^p$ weich. Nach der vorigen Folgerung ist auch $\mathcal{K}^{p+1}$ weich. Nach Satz 32 ist die Folge von abelschen Gruppen

$$0 \to \mathcal{K}^p(X) \to \mathcal{A}^p(X) \to \mathcal{K}^{p+1}(X) \to 0$$

exakt, und durch nochmalige Anwendung von Aufgabe 30 folgt die Behauptung. □

Es ist schwer direkt nachzuprüfen, ob eine Garbe weich ist. Der folgende Begriff ist besser handhabbar.

Definition 40 *Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem parakompakten topologischen Raum heißt fein, wenn es für jede lokal-endliche offene Überdeckung $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ von X eine Familie von Garbenmorphismen $\eta_\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

(i) $\sum_{\alpha \in A} \eta_\alpha = \mathrm{id}$.

(ii) Für jedes α ist der Träger von $\eta_\alpha(\mathcal{F})$ in U_α enthalten.

(Der Träger einer Garbe $\mathcal{G}$ von abelschen Gruppen ist der Abschluss der Menge aller $x \in X$ mit der Eigenschaft $\mathcal{G}_x \neq 0$.)

Es ist klar, dass für eine weiche Garbe $\mathcal{R}$ von Ringen jede Garbe von $\mathcal{R}$-Moduln weich ist. Mit Hilfe einer Zerlegung der Eins zeigt man, dass die Garbe der stetigen Funktionen auf einem parakompakten topologischen Raum und die Garbe der glatten Funktionen auf einer glatten parakompakten Mannigfaltigkeit fein sind. Die Garbe der analytischen Funktionen auf einer analytischen Mannigfaltigkeit nicht weich, also auch nicht fein. Dies folgt im komplexen Fall aus Satz 2, angewendet in einer Karte, und im reellen Fall durch Fortsetzung von einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ auf eine Umgebung in $\mathbb{C}^n$.

Satz 33 *Jede feine Garbe ist weich.*

Beweis. Es sei S abgeschlossen in X und $s \in \mathcal{F}(S)$. Wir wählen einen Repräsentanten (U_1, s_1) für s. Dann bilden U_1 und $U_2 = X \setminus S$ eine offene Überdeckung von X, und da $\mathcal{F}$ eine feine Garbe ist, existieren η_1 und η_2 mit den obigen Eigenschaften. Wir setzen $t_1 = \eta_1(s_1) \in \mathcal{F}(U_1)$ und $t_2 = 0 \in \mathcal{F}(V)$, wobei V das Komplement des Trägers von t_1 bezeichnet.

Wegen Lemma 12 und Eigenschaft (ii) gilt $t_1|_{U_1 \cap V} = 0 = t_2|_{U_1 \cap V}$, also fügen sich t_1 und t_2 zu einem $t \in \mathcal{F}(X)$ ausammen. Aus Eigenschaft (i) folgt

$$s = s_1|_S = t_1|_S + \eta_2(s_1)|_S.$$

Der erste Term ist gleich $t|_S$, der zweite verschwindet wegen Eigenschaft (ii). □

14 Kohomologie von Garben

Zunächst definieren wir die Homologie von Komplexen als Maß für die Abweichung von der Exaktheit. Es sei

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{A}^{p-1} \xrightarrow{d_{p-1}} \mathcal{A}^p \xrightarrow{d_p} \mathcal{A}^{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} \ldots$$

ein Komplex von Garben. Man fasst ihn oft zu einer graduierten Garbe $\mathcal{A}^\bullet$ mit einem Endomorphismus $d : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{A}^\bullet$ vom Grad 1 zusammen.

Definition 41 *Die p-te Homologiegarbe eines Komplexes $\mathcal{A}^\bullet$ von Garben ist die Garbe $\mathcal{H}^p(\mathcal{A}^\bullet) = \operatorname{Koker} i_p$, wobei $i_p : \operatorname{Im} d_{p-1} \to \operatorname{Ker} d_p$ der natürliche Morphismus aus Definition 38 ist.*

Ein Morphismus $f : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ von Komplexen von Garben heißt Homologismus, wenn die induzierten Morphismen $\mathcal{H}^p(f) : \mathcal{H}^p(\mathcal{A}^\bullet) \to \mathcal{H}^p(\mathcal{B}^\bullet)$ Isomorphismen sind.

Auch die Homologiegarben kann man zu einer graduierten Garbe $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{A}^\bullet)$ zusammenfassen. Wir erinnern daran, dass $\operatorname{Ker} i_p = 0$. Somit ergibt sich aus Lemma 14, dass ein Komplex $\mathcal{A}^\bullet$ genau dann exakt ist, wenn $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{A}^\bullet) = 0$.

Lemma 18 *Ein Morphismus von Garben $f : \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{A}^\bullet$, wobei $\mathcal{F}^p = 0$ für $p \neq 0$ und $\mathcal{A}^p = 0$ für $p < 0$, ist genau dann ein Homologismus, wenn die Folge*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{A}^2 \longrightarrow \ldots$$

exakt ist. (In diesem Fall nennt man den Komplex $\mathcal{A}^\bullet$ eine rechte Auflösung der Garbe $\mathcal{F}^0$.)

Beweis. Wegen Lemma 14 ist f genau dann ein Homologismus, wenn

$$\mathcal{H}^0(f) : \mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\bullet) \cong \mathcal{H}^0(\mathcal{A}^\bullet), \qquad \mathcal{H}^p(\mathcal{A}^\bullet) = 0 \quad (p > 0).$$

Mit den natürlichen Isomorphismen

$$\mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\bullet) \cong \mathcal{F}^0, \qquad \mathcal{H}^0(\mathcal{A}^\bullet) \cong \operatorname{Ker} d_0$$

lässt sich dies umformulieren als

$$\operatorname{Ker} f_0 = 0, \qquad \operatorname{Im} f_0 \cong \operatorname{Ker} d_0, \qquad \operatorname{Im} d_{p-1} \cong \operatorname{Ker} d_p \quad (p > 0),$$

was gerade Exaktheit der besagten Folge ausdrückt. □

Definition 42 *Es seien f, $g : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ Morphismen von Komplexen. Eine Homotopie s zwischen f und g ist eine Familie von Morphismen $s_p : \mathcal{A}^p \to \mathcal{B}^{p-1}$, so dass*

$$g - f = s \circ d + e \circ s,$$

wobei $d : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{A}^\bullet$ und $e : \mathcal{B}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ die Komplexabbildungen bezeichnen.

Zwei Morphismen von Komplexen heißen homotop, wenn es zwischen ihnen eine Homotopie gibt. Ein Morphismus $f : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ heißt Homotopismus, wenn es einen Morphismus $h : \mathcal{B}^\bullet \to \mathcal{A}^\bullet$ gibt, so dass $f \circ h$ und $h \circ f$ homotop zum identischen Morphismus sind.

Ist s eine Homotopie zwischen f und g und ist t eine Homotopie zwischen g und h, so ist $s + t$ eine Homotopie zwischen f und h. Homotope Morphismen induzieren denselben Morphismus auf den Homologiegarben. Jeder Homotopismus ist also ein Homologismus.

Definition 43 *Eine Garbe $\mathcal{I}$ heißt injektiv, wenn es für beliebige Morphismen von Garben $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $g : \mathcal{A} \to \mathcal{I}$ mit $\operatorname{Ker} f = 0$ einen Morphismus $h : \mathcal{B} \to \mathcal{I}$ gibt, so dass $g = h \circ f$.*

Anstelle der Bedingung $\operatorname{Ker} f = 0$ genügt es, zu verlangen, dass $g \circ \ker f = 0$, denn dann gibt es ein $g_1 : \operatorname{Im} f \to \mathcal{I}$ mit $g = g_1 \circ \operatorname{koim} f$, und wir können die Definition auf $f_1 = \operatorname{im} f : \operatorname{Im} f \to \mathcal{B}$ und g_1 anwenden.

Satz 34 *Es seien $\mathcal{A}^\bullet$ und $\mathcal{B}^\bullet$ Komplexe, und für $j \leq p$ seien Morphismen $f_j : \mathcal{A}^j \to \mathcal{B}^j$ gegeben, so dass*

$$f_j \circ d_{j-1} = e_{j-1} \circ f_{j-1}.$$

Ist $\mathcal{B}^i$ injektiv für $j > p$ und ist $\mathcal{H}^j(\mathcal{A}^\bullet) = 0$ für $j \geq p$, so setzt sich f zu einem Morphismus von Komplexen fort, und beliebige zwei solche Fortsetzungen sind homotop.

Beweis. Angenommen, für ein $j > p$ existieren $s_j : \mathcal{A}^j \to \mathcal{B}^{j-1}$ und $s_{j-1} : \mathcal{A}^{j-1} \to \mathcal{B}^{j-2}$, so dass

$$f_{j-1} = s_j \circ d_{j-1} + e_{j-2} \circ s_{j-1}.$$

Wir wollen zeigen, dass dann auch ein $s_{j+1} : \mathcal{A}^{j+1} \to \mathcal{B}^j$ existiert, so dass

$$f_j = s_{j+1} \circ d_j + e_{j-1} \circ s_j.$$

Dazu setzen wir $g_j = f_j - e_{j-1} \circ s_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g_j \circ d_{j-1} &= f_j \circ d_{j-1} - e_{j-1} \circ s_j \circ d_{j-1} \\ &= e_{j-1} \circ (f_{j-1} - s_j \circ d_{j-1}) = e_{j-1} \circ e_{j-2} \circ s_{j-1} = 0, \end{aligned}$$

also $g_j \circ \ker d_j \circ i_j \circ \operatorname{koim} d_{j-1} = 0$. Da $\operatorname{Koker}(\operatorname{koim} d_{j-1}) = 0$ und da i_j wegen $\mathcal{H}^j(\mathcal{A}^\bullet) = 0$ ein Isomorphismus ist, folgt $g_j \circ \ker d_j = 0$. Weil $\mathcal{B}^j$ eine injektive Garbe ist, existiert ein s_{j+1} mit $g_j = s_{j+1} \circ d_j$, wie behauptet. Wenden wir dies auf die Differenz von zwei Fortsetzungen an und setzen $s_j = 0$ für $j \le p+1$, so folgt, dass sie homotop sind.

Betrachten wir den Spezialfall, dass alle $f_j = 0$ sind, und setzen $t_j = (-1)^j s_j$, so ist die Bedingung an s, eine Homotopie zwischen 0 und 0 zu sein, äquivalent dazu, dass t ein Morphismus von Komplexen ist, wenn wir die Indizes von $\mathcal{B}^\bullet$ um Eins verschieben. Die Existenz der Fortsetzung von f folgt also aus demselben Argument. □

Folgerung 9 *Sind $f : \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{A}^\bullet$ und $g : \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{I}^\bullet$ zwei rechte Auflösungen der Garbe $\mathcal{F}^0$, wobei $\mathcal{I}^\bullet$ injektiv ist (d. h. dass alle $\mathcal{I}^p$ injektiv sind), so gibt es einen Morphismus $h : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{I}^\bullet$ von Komplexen, so dass $g = h \circ f$, und zwei solche Morphismen sind homotop. Insbesondere gibt es zwischen zwei beliebigen injektiven Auflösungen von $\mathcal{F}^0$ einen bis auf Homotopie eindeutigen Homotopismus.*

Lemma 19 *(i) Jede injektive Garbe ist welk.*

(ii) Für jede Garbe $\mathcal{F}$ gibt es eine injektive Garbe $\mathcal{I}$ und einen Morphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$ mit $\operatorname{Ker} f = 0$.

Beweisidee. (i) Ist eine injektive Garbe $\mathcal{I}$ und eine offene Menge U gegeben, so definieren wir Garben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ durch

$$\mathcal{A}(V) = \begin{cases} \mathcal{I}(V), & \text{falls } V \subset U, \\ 0 & \text{andernfalls,} \end{cases} \qquad \mathcal{B}(V) = \mathcal{I}(V \cap U).$$

Dann haben wir natürliche Morphismen $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $g : \mathcal{A} \to \mathcal{I}$, und aus der Definition erhalten wir einen Morphismus $h : \mathcal{B} \to \mathcal{I}$ mit $h \circ f = g$. Die Abbildung $h_X : \mathcal{B}(X) = \mathcal{I}(U) \to \mathcal{I}(X)$ ist die gesuchte Ausdehnungsabbildung. Nach Einschränkung der Garben auf U erfüllen die Morphismen nämlich die Gleichung $h|_U = (h|_U) \circ (f|_U) = g|_U = \mathrm{id}$.

(ii) Man definiert den Begriff der injektiven abelschen Gruppe analog zu dem der injektiven Garbe und zeigt, dass jede abelsche Gruppe in eine injektive abelsche Gruppe eingebettet werden kann, genannt ihre injektive Hülle. Nun definiert man $\mathcal{I}$ als die Menge der unstetigen (d. h. nicht notwendig stetigen) Schnitte von $\bigsqcup_{x\in X} I_x$, wobei I_x die injektive Hülle des Halmes $\mathcal{F}_x$ bezeichnet.

Folgerung 10 *Jede Garbe besitzt eine injektive Auflösung.*

Beweis. Bezeichnen wir nämlich die injektive Garbe aus dem Lemma mit $\mathcal{I}^0$ und setzen $\mathcal{F}^1 = \mathrm{Koker}(\mathcal{F} \to \mathcal{I}^0)$, so erhalten wir eine kurze exakte Folge

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{F}^1 \to 0.$$

Durch wiederholte Anwendung des Lemmas findet man für jedes $p \geq 0$ eine kurze exakte Folge

$$0 \to \mathcal{F}^p \to \mathcal{I}^p \to \mathcal{F}^{p+1} \to 0,$$

wobei $\mathcal{I}^p$ injektiv ist. Diese Folgen verbindet man mit Hilfe von Aufgabe 30 zu einer langen exakten Folge wie in Lemma 18. □

Analog zu den Homologiegarben eines Komplexes von Garben definiert man Homologiegruppen $H^p(A^\bullet)$ eines Komplexes $A^\bullet$ abelscher Gruppen.

Definition 44 *Die p-te Kohomologiegruppe einer Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X ist definiert als*

$$H^p(X, \mathcal{F}) = H^p(\mathcal{I}^\bullet(X)),$$

wobei $\mathcal{I}^\bullet$ eine injektive Auflösung von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{I}^\bullet(X)$ den Komplex abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^0(X) \longrightarrow \mathcal{I}^1(X) \longrightarrow \mathcal{I}^2(X) \longrightarrow \dots$$

bezeichnet. Die Garbe $\mathcal{F}$ heißt azyklisch, wenn $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $p > 0$.

Folgerung 11 *(i) Ein Morphismus von Garben induziert einen Morphismus zwischen ihren Kohomologiegruppen.*

(ii) Zwischen den Kohomologiegruppen derselben Garbe, die mit Hilfe verschiedener injektiver Auflösungen definiert sind, gibt es einen kanonischen Isomorphismus.

(iii) Die natürliche Abbildung

$$\mathcal{F}(X) \to H^0(X, \mathcal{F})$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

(iv) Jede weiche Garbe auf einem parakompakten topologischen Raum wie auch jede welke Garbe ist azyklisch.

Behauptungen (i) und (ii) ergeben sich aus Folgerung 9. Aus der exakten Folge von Lemma 18 erhalten wir mit Aufgabe 30 und Aufgabe 29 die exakten Folgen

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{I}^0(X) \to \mathcal{K}^1(X), \qquad 0 \to \mathcal{K}^1(X) \to \mathcal{I}^1(X) \to \mathcal{K}^2(X),$$

so dass

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{I}^0(X) \to \mathcal{I}^1(X)) \cong \mathrm{Ker}(\mathcal{I}^0(X) \to \mathcal{K}^1(X)) \cong \mathcal{F}(X).$$

Behauptung (iv) ergibt sich aus Folgerung 8 und Lemma 19(i).

Satz 35 *Es sei*

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{g} B^\bullet \xrightarrow{h} C^\bullet \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge von Komplexen abelscher Gruppen. Dann haben wir die lange exakte Folge

$$0 \longrightarrow H^0(A^\bullet) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(B^\bullet) \xrightarrow{H^0(h)} H^0(C^\bullet) \xrightarrow{\delta_0} H^1(A^\bullet) \xrightarrow{H^1(g)} \dots$$
$$\dots \longrightarrow H^p(A^\bullet) \xrightarrow{H^p(g)} H^p(B^\bullet) \xrightarrow{H^p(h)} H^p(C^\bullet) \xrightarrow{\delta_p} H^{p+1}(A^\bullet) \xrightarrow{H^{p+1}(g)} \dots$$

mit kanonischen Verbindungshomomorphismen δ_p.

Letzteres bedeutet, dass jeder Morphismus zwischen kurzen exakten Folgen von Komplexen einen Morphismus zwischen den langen exakten Homologiefolgen induziert.

Beweis. Die kurze exakte Folge von Komplexen kann man explizit durch folgendes kommutatives Diagramm darstellen:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & A^{p+1} \arrow[r, "g_{p+1}"] & B^{p+1} \arrow[r, "h_{p+1}"] & C^{p+1} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^p \arrow[u, "d_p"'] \arrow[r, "g_p"] & B^p \arrow[u, "e_p"'] \arrow[r, "h_p"] & C^p \arrow[u, "f_p"'] \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Ist $c \in C^p$ mit $f_p(c) = 0$ gegeben, so gibt es wegen der Exaktheit der $p$ten Zeile ein $b \in B^p$ mit $h_p(b) = c$, und wegen der Kommutativität des Diagramms ist $e_p(b) \in \operatorname{Ker} h_{p+1}$. Wegen der Exaktheit der $(p+1)$ten Zeile gibt es genau ein $a \in A^{p+1}$ mit $g_{p+1}(a) = e_p(b)$. Wegen der Kommutativität folgt $g_{p+2}(d_{p+1}(a)) = 0$, und wegen der Exaktheit der $(p+2)$ten Zeile ist $d_{p+1}(a) = 0$.

Nun zeigt man durch ähnliche Diagrammjagd, dass die Klasse von a in $H^{p+1}(A^\bullet)$ nur von der Klasse von c in $H^p(C^\bullet)$ und nicht von der Wahl von b und c abhängt, also eine Abbildung δ_p definiert, und dass die entstehenden Folgen exakt sind.

Für einen Morphismus von kurzen exakten Folgen von Komplexen liefern die Bilder der obigen Elemente a, b und c in den Bildkomplexen die Konstruktion des dortigen Verbindungshomomorphismus, so dass der induzierte Morphismus der langen exakten Folgen mit den Verbindungshomomorphismen verträglich ist. □

Folgerung 12 *Ist*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge von Garben auf einem topologischen Raum X, so ist die Folge

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{A}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{B}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{C}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{A}) \longrightarrow \ldots \\ \quad \ldots \longrightarrow H^p(X,\mathcal{A}) \longrightarrow H^p(X,\mathcal{B}) \longrightarrow H^p(X,\mathcal{C}) \longrightarrow H^{p+1}(X,\mathcal{A}) \longrightarrow \ldots \end{array}$$

exakt (genannt lange exakte Kohomologiefolge).

Definition 45 *Eine Komplex $\mathcal{A}^\bullet$ heißt azyklisch, wenn für alle q und für alle $p > 0$ gilt*

$$H^q(X,\mathcal{A}^p) = 0.$$

Ein Komplex von weichen Garben auf einem parakompakten Hausdorffschen topologischen Raum (wie auch ein Komplex von welken Garben) ist nach Satz 8 azyklisch.

Satz 36 *Ist $\mathcal{A}^\bullet$ eine azyklische Auflösung der Garbe $\mathcal{F}$ auf dem topologischen Raum X, so sind die natürlichen Homomorphismen*

$$H^p(\mathcal{A}^\bullet(X)) \to H^p(X,\mathcal{F})$$

Isomorphismen.

Beweis. Nach Aufgabe 30 haben wir für $p > 1$ kurze exakte Folgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^{p-1} \longrightarrow \mathcal{A}^{p-1} \longrightarrow \mathcal{K}^p \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathcal{K}^p = \operatorname{Ker} d_p \cong \operatorname{Im} d_{p-1}$, und $\mathcal{K}^0 \cong \mathcal{F}$. Weil $\mathcal{A}^\bullet$ azyklisch ist, zerfällt die lange exakte Kohomologiefolge in die exakten Folgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^{p-1}(X) \longrightarrow \mathcal{A}^{p-1}(X) \longrightarrow \mathcal{K}^p(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{K}^{p-1}) \to 0,$$
$$0 \longrightarrow H^{q-1}(X, \mathcal{K}^p) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{K}^{p-1}) \longrightarrow 0$$

für $q > 1$. Somit ist

$$\begin{aligned} H^p(X, \mathcal{F}) &\cong H^p(X, \mathcal{K}^0) \cong H^{p-1}(X, \mathcal{K}^1) \cong \ldots \cong H^1(X, \mathcal{K}^{p-1}) \\ &\cong \mathcal{K}^p(X)/\operatorname{Im}(\mathcal{A}^{p-1}(X) \to \mathcal{K}^p(X)). \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 29 ist die Folge

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^p(X) \longrightarrow \mathcal{A}^p(X) \longrightarrow \mathcal{K}^{p+1}(X)$$

exakt, so dass

$$\begin{aligned} H^p(X, \mathcal{F}) &\cong \operatorname{Ker}(\mathcal{A}^p(X) \to \mathcal{K}^{p+1}(X))/\operatorname{Im}(\mathcal{A}^{p-1}(X) \to \mathcal{K}^p(X)) \\ &\cong H^p(\mathcal{A}^\bullet(X)). \end{aligned}$$

Man kann sich davon überzeugen, dass der konstruierte Isomorphismus mit der kanonischen Abbildung übereinstimmt. □

Um diesen Satz auf eine Garbe anzuwenden, muss man eine azyklische Auflösung (beispielsweise eine weiche Auflösung für parakompaktes X) kennen.

Ist X eine glatte Mannigfaltigkeit, so definieren wir die Gruppe der glatten singulären p-Koketten mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe A als

$$C^p(U, A) = \operatorname{Hom}(C_p(U), A),$$

wobei $C_p(U)$ die Gruppe der glatten singulären p-Ketten ist. Dann erhalten wir eine Prägarbe $C^p(A)$, die aber im Allgemeinen keine Garbe ist. Die Abbildung $C^p(U, A) \to \bar{C}^p(U, A)$ ist surjektiv, ihr Kern besteht aus den f, für die eine Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von U existiert, so dass $r^U_{U_\alpha}(f) = 0$ für alle α. Die transponierte Abbildung von $\partial_p : C_p(U) \to C_{p-1}(U)$ bezeichnen wir mit $d_{p-1} : C^{p-1}(U, A) \to C^p(U, A)$, d. h. $d_{p-1}(f) = f \circ \partial_p$.

Lemma 20 *Der Komplex*

$$0 \longrightarrow \bar{C}^0(A) \xrightarrow{d_0} \bar{C}^1(A) \xrightarrow{d_1} \bar{C}^2(A) \xrightarrow{d_2} \ldots$$

ist eine welke Auflösung der konstanten Garbe $\underline{A}$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit.

Beweis. Die Einschränkungsabbildungen der Prägarbe $C^p(A)$ und die natürlichen Abbildungen $C^p(U,A) \to \bar{C}^p(U,A)$ sind surjektiv, also ist $\bar{C}^p(A)$ eine welke Garbe.

Es sei $x \in X$ mit glatt kontrahierbarer Umgebung U. Sind also $q : U \to \{x\}$ und $i : \{x\} \to U$ die offensichtlichen Abbildungen, so gilt $q \circ i = \mathrm{id}_x$, und die Abbildung $i \circ q$ ist glatt homotop zu id_U. Mit Lemma 11 erhalten wir eine (Ketten-) Homotopie zwischen dem identischen Endomorphismus des Komplexes $C_\bullet(U)$ und $i_* \circ q_*$. Durch Dualisierung erhalten wir eine Homotopie zwischen dem identischen Endomorphismus des Komplexes $C^\bullet(A,U)$ und $q^* \circ i^*$, während $i^* \circ q^* = \mathrm{id}$. Dasselbe gilt für die auf dem Halm $\bar{C}^\bullet_x(A)$ induzierten Endomorphismen, also ist der natürliche Morphismus $\underline{A} \to \bar{C}^\bullet(A)$ ein Homologismus. □

Folgerung 13 *Für eine glatte Mannigfaltigkeit X gilt*

$$H^p(X,\underline{A}) \cong H^p(\bar{C}^\bullet(X,A)).$$

Man kann mit Hilfe wiederholter baryzentrischer Unterteilung zeigen, dass der natürliche Morphismus $C^\bullet(X,A) \to \bar{C}^\bullet(X,A)$ ein Homotopismus ist, so dass

$$H^p(C^\bullet(X,A)) \cong H^p(\bar{C}^\bullet(X,A)),$$

d. h. die Kohomologie der konstanten Garbe $\underline{A}$ stimmt mit der glatten singulären Kohomologie überein.

Lemma 21 (Poincaré) *Der Komplex*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

ist eine feine Auflösung der konstanten Garbe $\underline{\mathbb{R}}$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit.

Beweis. Sind x, U, i und q wie im Beweis von Lemma 20, so erhalten wir mit Hilfe von Lemma 11 eine Kettenhomotopie zwischen dem identischen Morphismus des Komplexes $\mathcal{E}^\bullet(U)$ und $q^* \circ i^*$, und analoges gilt für den Komplex der Halme. Folglich ist der natürliche Morphismus $\underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{E}^\bullet$ ein Homologismus. □

Folgerung 14 *Für eine glatte Mannigfaltigkeit X gilt*

$$H^p(X,\underline{\mathbb{R}}) \cong H^p(\mathcal{E}^\bullet(X)),$$

d. h. die Kohomologie der konstanten Garbe $\underline{\mathbb{R}}$ stimmt mit der Kohomologie $H^p(X,\mathbb{R})$ von de Rham überein.

Lemma 10 gibt uns einen Morphismus von Komplexen

$$\mathcal{E}^\bullet \to C^\bullet(\mathbb{R}).$$

Dieser induziert den kanonischen Isomorphismus

$$H^p(\mathcal{E}^\bullet(X)) \xrightarrow{\cong} H^p(C^\bullet(X, \mathbb{R}))$$

der De-Rham-Kohomologie auf die glatte singuläre Kohomologie.

Lemma 22 (Dolbeault) *Der Komplex*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_0} \mathcal{E}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \mathcal{E}^{p,2} \xrightarrow{\bar{\partial}_2} \ldots$$

ist eine feine Auflösung der Garbe $\mathcal{O}^p$ der holomorphen p-Formen auf einer komplexen Mannigfaltigkeit.

Folgerung 15 *Für eine komplexe Mannigfaltigkeit X gilt*

$$H^q(X, \mathcal{O}^p) \cong H^q(\mathcal{E}^{p,\bullet}(X)).$$

15 Zusammenhänge in Vektorbündeln

Zunächst betrachten wir ein lokal-triviales Faserbündel $\pi : E \to X$ über einer K-Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{S})$, wobei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Definition 46 *Ein Zusammenhang im Faserbündel $\pi : E \to X$ ist ein Untervektorbündel S von $T(E)$, so dass $T(E)$ die direkte Summe von V und S ist, wobei V das durch $V_e = T_e(E_{\pi(e)})$ definierte vertikale Teilbündel bezeichnet.*

Ist $g : Z \to X$ ein Morphismus, so definieren wir den induzierten Zusammenhang im induzierten Bündel

$$g^*(E) = \{(e, z) \in E \times Z \mid \pi(e) = g(z)\}$$

durch

$$g^*(S)_{(e,z)} = \{(v, w) \in S_e \times T_z(Z) \mid \pi'(e)v = g'(z)w\}.$$

Eine horizontale Hebung eines Morphismus $g_1 : Z \to X$ ist ein Morphismus $f_1 : Z \to E$, so dass $g_1 = \pi \circ f_1$ und $\operatorname{Im} f_1'(z) \subset S_{f_1(z)}$ für alle $z \in Z$.

Man prüft leicht, dass $g^*(S)$ tatsächlich ein Zusammenhang ist und dass für jede $g^*(S)$-horizontale Hebung f_1 eines Morphismus $g_1 : Z_1 \to Z$ nach $g^*(E)$ die Verkettung $f \circ f_1$ eine S-horizontale Hebung von $g \circ g_1$ ist, wobei $f : g^*(E) \to E$ den natürlichen Morphismus bezeichnet.

Nun sei $H \supset K$ eine K-Divisionsalgebra und E ein H-Vektorbündel.

Definition 47 *Ein linearer Zusammenhang in einem H-Vektorbündel ist ein Zusammenhang S mit folgenden Eigenschaften: Er ist invariant unter dem Automorphismus von E, der durch faserweise Multiplikation mit einem beliebigen $\lambda \in H$ induziert wird, und die Additionsabbildung $E \oplus E \to E$ bildet den Zusammenhang $\Delta^*(S \times S)$ in S ab. Hier bezeichnet $\Delta : X \to X \times X$ die Diagonalabbildung.*

Lemma 23 *Es sei S ein Zusammenhang in E, U eine kontrahierbare Umgebung von 0 in K, $g : U \to X$ ein Morphismus und $e \in E_{g(0)}$. Angenommen, die Fasern von E sind kompakt oder S ist linear. Dann gibt es genau eine horizontale Hebung f von $g|_U$ mit $f(0) = e$. Setzen wir $\mu_{g,z}(e) = f(z)$ und variieren e und f, so ist die induzierte Monodromie-Abbildung[5] $\mu_{g,z} : E_{g(0)} \to E_{g(z)}$ ein Diffeomorphismus und im Falle eines linearen Zusammenhangs ein linearer Isomorphismus.*

Beweis. Es genügt wegen der vorangehenden Bemerkung, eine $g^*(S)$-horizontale Hebung des identischen Morphismus von U in $g^*(E)$ zu finden. Da U kontrahierbar ist, können wir annehmen, dass $g^*(E) \cong U \times F$ trivial ist, aber $S_1 = g^*(S)$ ist nicht notwendig trivial. Es sei $\pi_1 : U \times F \to U$ die Projektion. Das Inverse von π_1', eingeschränkt auf $T_{(z,e)}(U \times F)$, ist von der Form $v \mapsto (v, h(z,e)v)$ und eine Abbildung $f_1(z) = (z, \varphi(z))$ ist genau dann eine horizontale Hebung, wenn

$$\varphi'(z) = h(z, \varphi(z)).$$

Die Abbildung h ist genau dann linear im zweiten Argument, wenn S ein linearer Zusammenhang ist. Nun folgen die Behauptungen aus den Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen für Funktionen einer reellen oder komplexen Variablen. □

Bemerkung. Für jedes Vektorfeld v auf einer offenen Teilmenge U von X gibt es genau ein Vektorfeld $\tilde{v}$ auf E (genannt die horizontale Hebung von v), so dass $\tilde{v}_e \in S_e$ und $\pi'(e)\tilde{v}_e = v_{\pi(e)}$. Ist g eine Integralkurve von v, so ist eine Hebung f von g offensichtlich eine Integralkurve von $\tilde{v}$.

Definition 48 *Eine kovariante Ableitung in einem H-Vektorbündel E über einer K-Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{S})$ ist ein Morphismus von Garben von H-Vektorräumen $\nabla : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}^1(E) = \mathcal{S}(E \otimes_K T^*(X))$ mit der Eigenschaft*

$$\nabla(fs) = df \cdot s + f\nabla s$$

für alle $f \in \mathcal{S}(U, H)$ und $s \in \mathcal{S}(U, E)$. Ist $v \in T_a(X)$, so schreiben wir $\nabla_v s = (\nabla s)(v)$.

[5] Im Fall $g(z) = g(0)$ nennt man sie auch Holonomie-Abbildungen

Lemma 24 *Ist ∇ eine kovariante Ableitung und $\theta \in \mathcal{S}^1(X, \operatorname{End}_H E)$, so ist auch $\nabla + \theta$ eine kovariante Ableitung. Auf diese Weise wirkt $\mathcal{S}^1(X, \operatorname{End}_H E)$ transitiv auf der Menge der kovarianten Ableitungen in E.*

Beweis. Offensichtlich ist $\nabla + \theta$ H-linear und erfüllt die Produktregel, ist also eine kovariante Ableitung. Sind nun ∇ und ∇' zwei kovariante Ableitungen, so ist ihre Differenz H-linear, und es gilt

$$(\nabla - \nabla')(fs) = (df \cdot s + f\nabla s) - (df \cdot s + f\nabla' s) = f(\nabla - \nabla')(s),$$

d. h. $\nabla - \nabla'$ ist ein Morphismus von Garben von $\mathcal{S}(H)$-Moduln. Diesem entspricht nach Satz 29 ein Morphismus von Bündeln $E \to E \otimes_K T^*(X)$, also ein Schnitt θ von $\operatorname{Hom}_H(E, E \otimes_K T^*(X))$ (vgl. die Bemerkung nach Definition 26). □

Beispiel. Ist $E = X \times H^r$ ein triviales Bündel, so ist das komponentenweise Differential d eine kovariante Ableitung. Jede andere kovariante Ableitung ist dann von der Form

$$\nabla = d + \theta$$

mit einer Differentialform $\theta \in \mathcal{S}^1(X, \operatorname{End}(H^r))$, genannt die Zusammenhangsform. Ist ∇ ein Zusammenhang in einem beliebigen Vektorbündel, so haben wir für jede lokale Trivialisierung eine Zusammenhangsform auf der jeweiligen Trivialisierungsumgebung.

Lemma 25 *Ist S ein linearer Zusammenhang in einem Vektorbündel E und definieren wir $\nabla_v : \mathcal{S}(U, E) \to E_a$ für $v \in T_a(X)$ durch*

$$\nabla_v s = \overline{s'(a)v},$$

wobei $w \mapsto \bar{w}$ die Projektion $T(E) \to V$ mit Kern S bezeichnet, so ist ∇ eine kovariante Ableitung. Jede kovariante Ableitung entsteht auf diese Weise aus einem Zusammenhang.

Ist $g : U \to X$ ein Morphismus mit $g(0) = a$, $g'(0) = v$, so gilt

$$\nabla_v s = \frac{d}{dz} \mu_{g,z}^{-1}(s(g(z)))|_{z=0}.$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die letzte Behauptung. Ist W eine Umgebung von $e = s(a)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(W)$, so gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\varphi(\mu_{g,z}^{-1}(s(g(z))))|_{z=0} &= \frac{d}{dz}((\mu_{g,z}^{-1})^*\varphi)(s(g(z))|_{z=0} \\
&= \frac{d}{dz}\varphi(s(g(z))|_{z=0} + \frac{d}{dz}((\mu_{g,z}^{-1})^*\varphi)(e) \\
&= (s'(a)v)(\varphi) - \tilde{v}_e(\varphi).
\end{aligned}$$

Da $s'(a)v$ und $\tilde{v}_e$ dasselbe Bild v unter $\pi'(e)$ haben, ist $\tilde{v}$ die Projektion von $s'(a)v$ auf S entlang V, und $s'(a)v - \tilde{v}_e = \overline{s'(a)v} = \nabla_v s$.

Da die Monodromieabbildungen linear sind, folgen die Ableitungsregeln für den kovarianten Zusammenhang aus den Ableitungsregeln für Abbildungen $U \to E_a$.

Umgekehrt sei ein Morphismus ∇ mit den obigen Eigenschaften gegeben. In einer lokalen Trivialisierung über einer offenen Menge $U \subset X$ haben wir $\nabla = d + \theta$ mit einer eindeutig bestimmten Zusammenhangsform θ. Wir definieren das Unterbündel S von $T(E|_U)$ durch

$$S_e = \{-\theta(v)e \mid v \in T_{\pi(e)}(X)\}.$$

Dann ist ∇ die zum Zusammenhang S gehörige kovariante Ableitung. Der Zusammenhang S ist eindeutig dadurch bestimmt, dass $\nabla s = 0$ genau dann, wenn $s'(a) \in S_{s(a)}$ für alle $v \in T_a(X)$, also unabhängig von der lokalen Trivialisierung. $\square$

Definition 49 *Eine Metrik auf einem Vektorbündel ist eine faserweise nichtausgeartete positiv definite H-hermitesche Bilinearform, so dass für beliebige Schnitte s, $t \in \mathcal{S}(U, E)$ gilt $h(s,t) \in \mathcal{S}(U, K)$. Ein metrischer Zusammenhang in einem Vektorbündel mit Metrik ist ein linearer Zusammenhang, dessen Monodromieabbildungen Isometrien sind.*

Es ist klar, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die zugehörige kovariante Ableitung die Eigenschaft

$$v(h(s,t)) = h(\nabla_v s, t) + h(s, \nabla_v t).$$

für beliebige s, $t \in \mathcal{S}(U, E)$, $a \in U$ und $v \in T_a(X)$ hat.

Lemma 26 *Auf jedem Vektorbündel über einer (parakompakten) glatten Mannigfaltigkeit existiert eine Metrik und dazu ein metrischer Zusammenhang.*

Beweis. Die Basis X hat wegen ihrer Parakompaktheit eine lokal-endliche Überdeckung durch Trivialisierungsumgebungen $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ und eine zugehörige glatte Zerlegung der Eins $\{\eta_\alpha \mid \alpha \in A\}$. In jeder Trivialisierung wählen wir eine konstante Metrik h_α. Dann setzt sich $\eta_\alpha h_\alpha$ zu einer glatten faserweisen Bilinearform über ganz X fort, und die Bilinearform $h = \sum_{\alpha \in A} \eta_\alpha h_\alpha$ ist offensichtlich positiv definit.

Eine Trivialisierung ist gleichbedeutend mit einer Wahl von r Schnitten, die faserweise linear unabhängig sind. Wenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren an, so erhalten wir eine faserweise h-Orthonormalbasis von Schnitten. Wir können also annehmen, dass in den obigen Trivialisierungen über

U_α die Metrik h faserweise konstant ist. Dann ist das äußere Differential bezüglich einer gegebenen Trivialisierung ein metrischer Zusammenhang ∇_α über U_α. Da die Menge der kovarianten Ableitungen nach Lemma 24 ein affiner Raum ist, definiert $\nabla = \sum_{\alpha \in A} \eta_\alpha \nabla_\alpha$ auf korrekte Weise eine kovariante Ableitung und somit einen Zusammenhang. $\square$