

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Blatt 10 - Abgabe bis 19.6.2012

46. Finden Sie eine obere und eine untere Abschätzung für die Lösung f der Differentialgleichung

$$y' = x + \cos y$$

mit dem Anfangswert $f(0) = 0$.

47. Es seien X, Y und Z metrische Räume und $F : X \times Y \rightarrow Z$ eine Funktion, die sowohl bezüglich der ersten Variable als auch bezüglich der zweiten Variable Lipschitz-stetig ist, wobei die Metrik auf $X \times Y$ durch

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$

definiert ist. Zeigen Sie, dass F dann Lipschitz-stetig ist.

Geben Sie eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an, die nicht Lipschitz-stetig ist, obwohl für jedes y die Funktion $f_y(x) = F(x, y)$ sowie für jedes x die Funktion $g_x(y) = F(x, y)$ Lipschitz-stetig ist.

48. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times V$ und $F : D \rightarrow V$ stetig sowie bezüglich des zweiten Arguments lokal Lipschitz-stetig. Für $(x_0, y_0) \in D$ sei $f_{x_0, y_0} : I_{x_0, y_0} \rightarrow V$ die maximale Lösung der Differentialgleichung

$$y' = F(x, y)$$

mit dem Anfangswert $f_{x_0, y_0}(x_0) = y_0$. Wir definieren für $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$

$$D_{x_0}^{x_1} = \{y_0 \in V \mid (x_0, y_0) \in D, x_1 \in I_{x_0, y_0}\}$$

und $G_{x_0}^{x_1} : D_{x_0}^{x_1} \rightarrow V$ durch $G_{x_0}^{x_1}(y_0) = f_{x_0, y_0}(x_1)$. Beweisen Sie für reelle Zahlen x_0, x_1 und x_2 die Inklusion

$$(G_{x_0}^{x_1})^{-1}(D_{x_1}^{x_2}) \subseteq D_{x_0}^{x_2}$$

und die Gleichheit der auf der linken Menge definierten Abbildungen

$$G_{x_1}^{x_2} \circ G_{x_0}^{x_1} = G_{x_0}^{x_2}.$$

b.w.

49. Es sei $a < b$, und das Intervall $[a, b]$ werde durch eine endliche Menge \mathcal{I} offener Intervalle überdeckt. Zeigen Sie, dass es Zahlen

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

mit folgender Eigenschaft gibt: Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert ein Intervall $I \in \mathcal{I}$, das x_{i-1} und x_i enthält.

50.* Es sei I ein Intervall und $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass für alle $x \in I$ gilt $(g(x), h(x)) \neq (0, 0)$. Zeigen Sie, dass dann stetige Funktionen $r : I \rightarrow]0, \infty[$ und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $x \in I$ gilt

$$g(x) = r(x) \sin \varphi(x), \quad h(x) = r(x) \cos \varphi(x).$$